

Capítulo 7

Localización no puntual: una perspectiva desde la Geometría Computacional

José Miguel Díaz Báñez

Dpto. Matemática Aplicada II

Universidad de Sevilla

dbanez@us.es

Inmaculada Ventura Molina

Dpto. Matemáticas

Universidad de Huelva

inmaculada.ventura@dmат.uhu.es

7.1 Introduction

Galileo decía: "el libro de la naturaleza está escrito en los caracteres de la Geometría". En este capítulo se lleva a cabo una revisión de ciertos problemas de ubicación óptima de recursos en términos de patrones y comportamientos geométricos.

Las versiones clásicas de problemas de *localización de servicios* (localización puntual) consideran el posicionamiento óptimo de uno o varios puntos sobre un espacio prefijado. Una extensión natural de estos problemas aparece cuando el servicio a instalar no puede ser representado por puntos sino que se requiere un modelo más complejo, como puede ser un objeto o estructura dimensional (localización no puntual). En [34] puede consultarse el estado del arte actual para problemas de localización no puntual en espacios continuos. Para estos problemas, el uso de la geometría intrínseca del objeto a ubicar resulta esencial para el diseño de algoritmos eficientes de resolución. En este sentido, muchos de estos problemas, pertenecientes al área de *optimización geométrica*, también han sido considerados por la comunidad de *geometría computacio-*

nal, especialmente para el caso de problemas en espacios continuos. De hecho, muchos de estos problemas han aparecido, en su formulación geométrica, en otras áreas de aplicación como robótica, reconocimiento de patrones, sistemas de información geográfica, etc. El *análisis de localizaciones* es un área interdisciplinar que está directamente relacionada con otros campos como *la programación matemática, el análisis multicriterio, logística y transporte, estadística, geometría computacional*, etc. Con respecto a ésta última, dicha interacción ha permitido un intercambio de problemas y técnicas de resolución que han resultado de gran provecho, tanto desde el punto de vista disciplinar como aplicado. Dos trabajos donde se recogen algunos de estos resultados son [4, 72]. El objetivo principal de este capítulo es dar una panorámica de la resolución de problemas de localización continua no puntual desde el punto de vista de la geometría computacional, destacando las técnicas y metodología más utilizadas. Para ello, observaremos que cada problema de optimización puede redefinirse de forma geométrica y, de este modo, el uso de estructuras convenientes y patrones algorítmicos muy utilizados en geometría computacional, proporcionan métodos eficientes de resolución.

Con respecto al tratamiento que aquí se hace de los aspectos algorítmicos, deben ser aclarados varios términos. Aunque asumimos que el lector posee cuanto menos un conocimiento básico de algorítmica y geometría computacional, creemos necesario una breve puntualización. La geometría computacional es una disciplina que se ha venido desarrollando desde la década de los 80 impulsada por los avances y las necesidades informáticas y tecnológicas en general. Podemos decir que, en un sentido amplio, se ocupa de diseño y análisis de algoritmos eficientes que resuelven problemas de índole geométrica. Entre las numerosas referencias existentes, sugerimos [18] para una introducción. De este modo, si pretendemos mirar la resolución de un problema desde este punto de vista, esto es, búsqueda de un método rápido de ejecución, nos centraremos en el criterio de eficiencia para valorar un determinado algoritmo. No haremos referencia por tanto, a otros criterios de valoración de un algoritmo como son la elegancia, la simplicidad o la robusted. Tampoco entraremos en disquisiciones numéricas que podrían estar presentes en una fase de implementación y que, por otra parte, también se presentan en los algoritmos “menos eficientes”.

Para valorar la eficiencia de un algoritmo consideraremos, como se hace en matemática computacional, un modelo teórico de computación en el que ciertos procesos básicos tienen asociados un coste de tiempo y espacio. Daremos por supuesto el modelo RAM real (el más usado en geometría computacional) y nos referiremos al comportamiento de un

algoritmo con un “análisis en el peor caso”, esto es, calculando el coste global en la situación más desfavorable. Así, en este contexto, se aspira a poder demostrar de manera estrictamente formal que cierto algoritmo es “rápido” y, si es posible, demostrar que es “óptimo” probando para ello cotas inferiores. Un texto básico sobre algoritmia es [17]. Un trabajo previo que se ha hecho en este sentido puede encontrarse en [22].

No es objeto de este estudio dar un análisis ni una recopilación exhaustivos de todos los problemas estudiados en el ámbito de referencia, sino más bien hacer un recorrido sobre algunos problemas que corresponden a un patrón determinado con objeto de mostrar una forma peculiar de afrontar los problemas. Por ello, es preciso señalar que aunque ya se conocen bastantes resultados en modelos más generales, aquí nos restringiremos al caso de **localización de estructuras en el plano con distancias euclídeas no ponderadas**. Formalmente el modelo general de los problemas aquí tratados es el siguiente:

Dado un conjunto de puntos (u objetos) $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ en el plano, encontrar un objeto o estructura E , sometido a un conjunto de restricciones \mathcal{R} , que resuelva el problema:

$$\text{MINIMAX} \quad \min_{E \in \mathcal{R}} \max_i d(p_i, E)$$

o bien

$$\text{MAXIMIN} \quad \max_{E \in \mathcal{R}} \min_i d(p_i, E)$$

donde se define $d(p_i, E) = \min_{x \in E} d_2(p_i, x)$.

Hay que reseñar que muchos de los resultados obtenidos para este modelo simple se adaptan o generalizan para el caso de distancias distintas de la euclídea [75] así como para los casos multiplicativamente ponderados [31]. Por otra parte, existen bastantes resultados para la localización de estructuras con el criterio MINISUM que no citaremos aquí y que pueden consultarse en [34].

El trabajo se ha organizado de acuerdo con el tipo de objeto o estructura a ubicar. De esa forma, en la sección 2 se recogen los resultados para la localización de rectas y semirrectas de origen conocido. La sección 3 está dedicada a los distintos problemas que han aparecido sobre ubicación óptima de segmentos. El caso de localización de circunferencias se analiza en la sección 4, dejando la sección 5 para el estudio de otro tipo de curva simple para la cual existen bastantes resultados, la curvas lineales a trozos o poligonales. Finalmente, en la sección 6 indicamos algunas conclusiones, comentarios y líneas de investigación a desarrollar que creemos de interés.

7.2 Ubicación de rectas

7.2.1 Recta minimax

La localización de servicios lineales para el criterio minimax con métrica euclídea ha sido un problema que ha despertado interés en un gran número de investigadores correspondientes a distintos campos. Pueden destacarse las aplicaciones en *Estadística robusta*, *reconocimiento de patrones* o *cartografía*. El trabajo [67] puede considerarse como punto de partida. Ahí se presenta el problema como el de la 1-recta centro y se hacen caracterizaciones básicas que han supuesto la referencia a trabajos posteriores. El resultado básico que se prueba es el siguiente,

Teorema 7.1. *Toda solución al problema 1-recta centro se encuentra a máxima distancia de al menos tres puntos de P .*

La propiedad anterior permite resolver el problema considerando todos los conjuntos de tres puntos. El procedimiento inicial de tiempo $O(n^4)$ (digamos *ingenuo* o de *fuerza bruta*), que considera todos los casos y elige el mejor, va a ser mejorado haciendo uso de métodos más eficientes basados en consideraciones y estructuras geométricas. Por una parte, el conjunto de puntos que determinan la solución (están a máxima distancia de ella) deben encontrarse en el cierre convexo de los puntos. Además, en este caso, se cumple la siguiente propiedad para una recta solución r^* de distancia máxima e^* : existen dos líneas paralelas de soporte sobre el cierre convexo de los puntos, $CH(P)$, que determinan una banda de anchura $2e^*$ de forma que la solución r^* está situada justo a la mitad de la banda.

Basado en estas propiedades, en [54] se resuelve el problema de la anchura de un conjunto de puntos, que es equivalente al problema minimax lineal, usando la técnica de los *calibres rotadores* [77]. Una vez calculado el cierre convexo, la idea es enumerar todas las bandas candidatas en tiempo $O(n)$ y tomar la de menor anchura (véase la Figura 7.1), lo que proporciona un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$. Posteriormente, en [63] se prueba que este algoritmo es óptimo.

7.2.2 La recta maximin

El problema de encontrar la recta que maximiza la mínima distancia a un conjunto de puntos P en el plano es equivalente al problema geométrico de encontrar la mayor banda vacía para el conjunto de puntos dados. Para garantizar la existencia de solución del problema se exige que la banda interseque a la envolvente convexa de P .

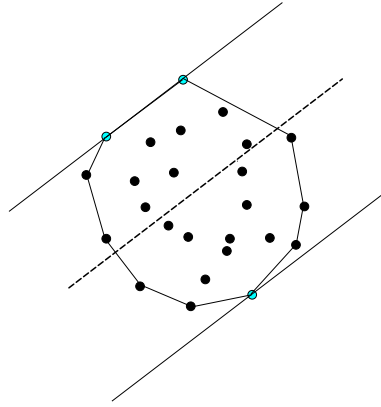


Figura 7.1. Anchura de un conjunto de puntos.

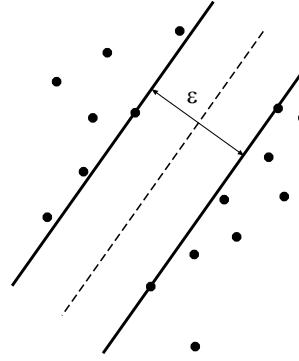


Figura 7.2. Corredor vacío de anchura ε .

En [53] se plantea el problema como el *corredor vacío más ancho a través de un conjunto de puntos*, donde por corredor se entiende la zona del plano determinada por dos rectas paralelas (Figura 7.2) y muestran la siguiente propiedad de caracterización de la solución:

Lema 7.1. *Sea C el corredor vacío más ancho a través de P limitado por las líneas paralelas l_1 y l_2 . Entonces, o bien, l_1 y l_2 contienen punto p_1 y p_2 de P , respectivamente, tal que el segmento $\overline{p_1 p_2}$ es perpendicular a l_1 y l_2 , o bien, una de las rectas está determinada por dos puntos y la otra por un punto y la pendiente de la anterior.*

Esta propiedad daría un procedimiento de fuerza bruta de complejidad $O(n^4)$ considerando todas las bandas determinadas por tres puntos. Sin embargo, en [53] se propone un algoritmo eficiente transformando el problema a una búsqueda en el arreglo de rectas del espacio dual (un punto de coordenadas (a, b) se transforma en la recta $y = ax - b$ y una recta $y = mx - n$ en el espacio primal se transforma en punto (m, n)). Usando el *barrido topológico* de [40], se hace en tiempo proporcional al número de segmentos del arreglo que es del orden $O(n^2)$, y por tanto, el problema queda resuelto en tiempo cuadrático, el cual, según conocemos, no ha sido aún mejorado.

La recta maximin con demanda poligonal. Una extensión interesante del problema anterior es la siguiente:

Dado un conjunto \mathcal{P} de m polígonos (no necesariamente disjuntos y convexos) con un total de n vértices, encontrar una recta l que interseque el interior de $CH(\mathcal{P})$ tal que $\min_{P \in \mathcal{P}} d(P, l)$ es máxima.

En [51, 52] se propone un algoritmo de tiempo $O(n^4)$ haciendo uso de la caracterización de una solución. Por otra parte, si interpretamos este problema como el *corredor máximo vacío a través de un conjunto de obstáculos*, en [58] se da una cota $O(n^2)$, volviendo a hacer uso del barrido topológico en el arreglo del dual geométrico junto con la caracterización de una solución, que no es más que la expresada en el lema 7.1 siendo ahora p_1, p_2 y p_3 vértices de los polígonos de \mathcal{P} .

Recientemente, se da una mejora en el trabajo [35] que se apoya en el siguiente resultado: dado $P \in \mathcal{P}$, sea P^* el conjunto de puntos duales a rectas que no cortan a P . Un vértice de P^* es la representación dual de una recta soporte de un polígono de \mathcal{P} . Si consideramos el arreglo $\mathcal{A}^* = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P^*$, puede probarse la propiedad siguiente:

Lema 7.2. \mathcal{A}^* tiene $O(m^2 + n)$ vértices y se calcula en tiempo $O((m^2 + n \log m) \log n)$.

En base a esta propiedad y usando barrido topológico sobre \mathcal{A}^* , el problema se resuelve en tiempo $O(m^2 + n)$ con preprocesamiento $O((m^2 + n \log m) \log n)$. En muchas aplicaciones, donde las regiones poligonales son aproximaciones de regiones curvilíneas, se tiene una cantidad pequeña de regiones poligonales cada una de ellas formadas por muchos vértices. En este caso, si suponemos que $m^2 \leq n$, se obtiene un procedimiento de tiempo $O(n)$ con preprocesamiento $O(n \log^2 n)$.

7.2.3 La semirrecta minimax

En el problema de la semirrecta centro se trata de encontrar una semirrecta con origen en un punto prefijado del plano de forma que se minimiza la máxima distancia de los puntos dados a la semirrecta. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la semirrecta parte del origen o y por tanto, la denotamos $h(\theta)$ donde θ es el ángulo, medido en sentido positivo, que forma la semirrecta con el eje X. La distancia de un punto a una semirrecta tiene distinta interpretación según se tome sobre el punto inicial (origen) o sobre la recta soporte de $h(\theta)$, $l(\theta)$. Por tanto, dada una semirrecta $h(\theta)$ y el conjunto de puntos \mathcal{P} , podemos distinguir dos tipos de puntos: los que toman la distancia sobre la recta $l(\theta)$ y los que lo hacen sobre el punto o .

En [63] se muestra que, para buscar la solución del problema, esto es, los puntos que la determinan, basta considerar los puntos de la envolvente convexa y, con un método similar al utilizado en el problema de la recta minimax, basado en la técnica de los *calibres rotadores*, presentan un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$.

7.2.4 La semirrecta maximin

Si la semirrecta anclada en un punto fijado o representa cierto “peligro” con respecto a los puntos dados, se adopta el modelo maximin. De forma análoga al caso de la recta minimax, el problema geométrico análogo es encontrar el mayor cilindro plano (o “silo”) vacío y anclado en o (Figura 7.3).

Dicho problema, que surgió como aplicación de un problema de robótica en neurocirugía, está resuelto en [44] con un algoritmo óptimo que se basa en un método muy conocido en geometría computacional. Se basa en una reducción del problema al cálculo de la envolvente inferior de un conjunto de funciones. Se demuestra que dicha envolvente posee un número de puntos de intersección del orden de n , lo que permite hacer un cálculo de la envolvente en tiempo $O(n \log n)$ usando las secuencias de Davenport-Schinzel [74]. De esta forma, mediante un barrido lineal, se obtiene un algoritmo de tiempo $O(n \log n)$ que resulta ser óptimo en el modelo de computación apropiado.

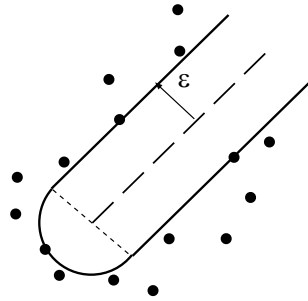


Figura 7.3. Silo vacío de radio ε .

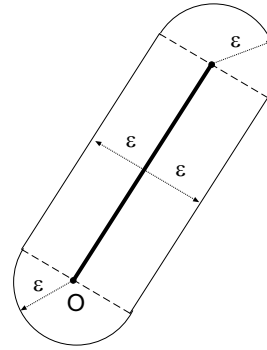


Figura 7.4. Hipódromo de radio ε .

7.3 Ubicación de segmentos

7.3.1 Criterio minimax

En la referencia [57] aparece por primera vez el problema del segmento centro: *dado un conjunto de puntos en \mathbb{R}^2 y un segmento s de longitud dada l , encontrar el emplazamiento de s de forma que se minimice la máxima distancia de los puntos al segmento.*

Cuando $l = 0$, el problema se reduce al problema del centro puntual, mientras que si l es suficientemente grande, se convierte en el proble-

ma de la recta centro. Por tanto, este problema puede ser considerado intermedio entre los dos referenciados. Las complejidades de los problemas 1-punto centro y 1-recta centro son esencialmente diferentes, lo que proporciona mayor interés precisamente al problema intermedio.

Un segmento de longitud dada queda totalmente determinado por la terna (x, y, θ) , donde (x, y) son las coordenadas del punto inicial y θ es la orientación del segmento con respecto al eje X positivo. Dado un segmento s de longitud l , representado por (x, y, θ) , el lugar geométrico de los puntos equidistantes de s a una distancia ε se conoce como *hipódromo* centrado en (x, y, θ) y radio ε (Figura 7.4). El problema es entonces equivalente a encontrar el hipódromo de menor radio que contenga a todos los puntos de \mathcal{P} .

Mientras tres puntos no colineales determinan un único círculo, en [57] se demuestran que para fijar un hipódromo son necesarios a lo más cuatro puntos. El algoritmo de fuerza bruta pasa por hacer un análisis exhaustivo de todos los posibles conjuntos de cuatro puntos y determinar las posibles situaciones de los puntos en las diferentes partes de la frontera del entorno o hipódromo del segmento solución. Este estudio permite resolver el problema en tiempo $O(n^5)$. Sin embargo, considerando preprocesados la envolvente convexa de los puntos y el diagrama de Voronoi del punto más lejano, puede reducirse la complejidad a $O(n^4 \log n)$.

Desde la publicación del citado artículo, han aparecido otros cuyo objetivo ha sido reducir la complejidad. Sólo citaremos aquí el último, [42], de complejidad cercana a lineal, donde se reduce la complejidad del problema haciendo uso de un sofisticado algoritmo de programación basado en la búsqueda paramétrica de Megiddo [65].

7.3.2 Criterio maximin

Un estudio sobre varios problemas de ubicación de segmentos “nocivos” basados en el criterio maximin se está llevando a cabo en [79]. Esbozamos aquí algunos casos que se encuentran en un avanzado estado de investigación.

El caso del segmento maximin anclado, esto es, *encontrar un segmento de longitud fijada y anclado en un punto dado, que maximice la mínima distancia a los puntos del conjunto de partida*, puede consultarse en [8], donde se demuestran las condiciones necesarias para que, haciendo un barrido sobre el arreglo de la envolvente inferior de las funciones distancia de los puntos a un segmento anclado, el problema pueda resolverse con un algoritmo óptimo de complejidad $\theta(n \log n)$.

Otro caso estudiado se refiere a al problema de *segmento maximin que conecta un punto y una curva fijados*. En este caso, la longitud no es una constante. Nótese que si la curva es una circunferencia, el problema se reduce al anterior. Para resolver este problema, en [26] se introduce una estructura nueva, *el diagrama de Voronoi anclado*, que se define siguiendo el formato de los diagramas de Voronoi abstractos definidos en [60]. Estos diagramas no se definen en base a un conjunto de puntos o generadores, sino en función de un conjunto de curvas conocidas como *curvas bisectoras*. En [26] se demuestra que tal estructura puede construirse en tiempo $O(n \log n)$, lo que da lugar a un algoritmo lineal para resolver el problema de optimización, sin más que restringir la búsqueda del punto extremo del segmento que cae sobre la curva, a los puntos de intersección de ésta con las aristas del diagrama de Voronoi anclado. Por tanto, la complejidad global resulta ser de tiempo $O(n \log n)$.

7.4 Ubicación de circunferencias

7.4.1 Circunferencia minimax

El problema de la circunferencia centro o su equivalente, el problema de la corona circular o anillo de mínima anchura que contiene a un conjunto de puntos (mostrado en la Figura 7.5), está directamente relacionado con el campo de la *metrología computacional*, concretamente con el concepto de la medida de *circularidad* de un conjunto (se dice que un conjunto de puntos tiene circularidad ε si existe un anillo de anchura ε que contiene al conjunto) y ha sido extensamente estudiado en geometría computacional [5, 62]. El resultado crucial es el siguiente:

Lema 7.3. *Si A es el anillo de mínima anchura que contiene al conjunto de puntos \mathcal{P} , existen dos puntos de \mathcal{P} sobre el círculo interior de A y dos puntos sobre el círculo exterior.*

Esta caracterización permite buscar el centro del anillo sobre puntos de intersección del diagrama de Voronoi del punto más cercano y el diagrama de Voronoi del punto más lejano, lo que da lugar a un algoritmo no trivial de tiempo $O(n^2)$ [39] y [38].

Esta misma caracterización puede usarse para aplicar el paradigma de computación paralela de *búsqueda paramétrica* [65] para obtener algoritmos más sofisticados de complejidad $O(n^{\frac{8}{5}+\epsilon})$ [3], $O(M^{\frac{17}{11}+\epsilon})$ [2] y tiempo esperado $O(M^{\frac{3}{2}+\epsilon})$ [6].

Un estudio sobre mínimos locales para el caso multidimensional se ha hecho en [45], donde se resuelve el problema de optimización en tiempo $O(n \log n)$ cuando los puntos están dados con un orden circu-

lar, situación muy común en la aplicación de metrología. Además, se demuestra que, si los puntos están en posición convexa, sólo existe un mínimo local y puede obtenerse en tiempo $O(n)$. Un estudio reciente para casos particulares es [19]

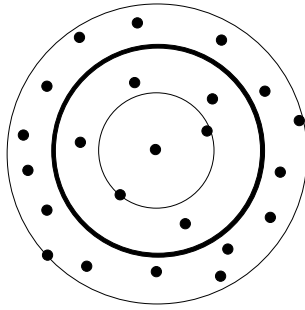


Figura 7.5. Anillo mínimo contenedor.

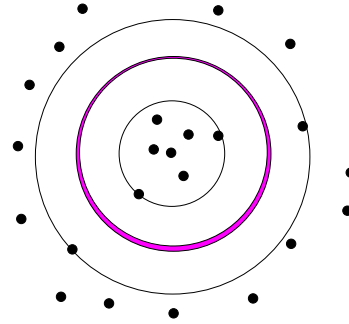


Figura 7.6. Anillo máximo vacío.

7.4.2 Circunferencia maximin

El problema inverso de optimización, esto es, *encontrar una circunferencia nociva*, se ha estudiado en [28]. En un marco geométrico, el problema es equivalente a encontrar *la corona circular de mayor área que no contiene puntos en su interior* (mostrado en la Figura 7.6). Con objeto de tener el problema bien definido, se ha supuesto la existencia de puntos dentro del círculo interior y fuera del exterior. El resultado de caracterización de una solución se concreta en el siguiente teorema:

Teorema 7.2. *Si existe una corona o anillo óptimo con dos o más puntos situados en el interior del círculo de menor radio, entonces existe un anillo solución que contiene a dos puntos o más en cada uno de los círculos concéntricos que lo definen.*

El teorema 7.2 implica que la búsqueda del centro del anillo puede ser limitada al arreglo de rectas mediatrices de cada par de puntos. Esta propiedad permite construir una estructura de datos sencilla y resolver el problema en tiempo $O(n^3 \log n)$. Por otra parte, si lo que buscamos es la corona óptima que contiene exactamente k puntos en su interior, donde k es una constante fijada, el problema se resuelve en tiempo $O(n \log n)$ [28].

7.5 Ubicación de curvas poligonales

Una extensión natural de los problemas de localización de servicios lineales en el plano es la ubicación de estructuras poligonales, que proporcionan en cierto sentido, la mejor aproximación del conjunto de puntos. La ubicación óptima de una ruta poligonal a través de un conjunto de puntos en el plano ha sido tratada desde diferentes puntos de vista, según los objetivos y aplicaciones a los que esté sujeto el problema.

En este sentido, se han considerado los dos criterios de optimización que recogemos en este trabajo. Por un lado, si queremos determinar la mejor ruta para la distribución de cierto producto a determinados clientes, que se representan por un conjunto de puntos en el plano, se usa el criterio minimax. De otro modo, si queremos diseñar una ruta que va a resultar nociva para una población, como por ejemplo, una tubería para el transporte de materiales radiactivos, o un camino evitando obstáculos en el campo de la robótica, se usa el criterio maximin.

En contraposición a lo que ocurre en los problemas de secciones anteriores, no siempre existen propiedades que caractericen una solución de este tipo de problemas. Por lo tanto, para algunos problemas de esta sección sólo esbozaremos métodos generales para resolver eficientemente los problemas.

A partir de ahora, llamaremos $\mathcal{P} = \{a = p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1} = b\}$ al conjunto de puntos dados y denotamos por $x(q)$ a la abscisa del punto q . Además, suponemos que los puntos de \mathcal{P} están dados en orden lexicográfico. Los extremos a (fuente o punto de partida del camino) y b (sumidero o punto de llegada del camino) pueden estar fijados o no y satisfacen que $x(a) < x(p_1)$ y $x(p_n) < x(b)$. Llamaremos C a la curva poligonal y d a la medida de la distancia desde un punto a la poligonal. Los dos problemas que revisamos son, respectivamente, minimizar la función $g(C) = \max_{p_m \in \mathcal{P}} d(p_m, C)$ y maximizar la función $h(C) = \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a, b\}} d(p_m, C)$.

7.5.1 Restricción sobre el número de codos o la longitud

Podemos encontrar una solución trivial que minimiza la función $g(C)$ tomando la curva poligonal que pasa por todos los puntos de \mathcal{P} . Sin embargo, la consideración de la *longitud* ($l(C)$) o *número de codos* ($b(C)$) como parte del costo resulta evidente en el diseño de rutas. Esto nos lleva a la consideración de problemas restringidos con cotas fijadas en esas variables.

La formulación para problemas de criterio minimax restringidos en el número de codos (en longitud) es:

$$\min_C \max_{p_m \in \mathcal{P}} d(p_m, C) \quad t.q. \quad b(C) \leq k \quad (l(C) \leq l_0).$$

El problema de la ubicación de servicios poligonales con el número de codos restringidos usando el criterio minimax está estrechamente relacionado con el de la aproximación mediante curvas poligonales. La aproximación de arcos de curvas lineales mediante curvas más simples es un tema estudiado en Geometría Computacional y aplicado en la representación del contorno de figuras más o menos complicadas, muy utilizado en campos como cartografía, reconocimiento de patrones y diseño gráfico. Si hacemos una “traducción” minuciosa de los trabajos existentes en ese área y lo reinterpretemos en el marco de la localización, podemos decir que han sido resueltos, desde el punto de vista de la Geometría Computacional, numerosos problemas de poligonales para el criterio minimax. Con objeto de situar al lector en el marco de trabajo adecuado para este tipo de problemas, introducimos algunas ideas que han dado lugar a métodos eficientes de resolución.

En los trabajos [16, 48, 55, 78] se han considerado los siguientes problemas de aproximación:

Min-# problem: Dado $\epsilon \geq 0$, aproximar \mathcal{P} mediante una curva poligonal C , con mínimo número de codos, de forma que el error cometido sea menor que ϵ .

Min- ϵ problem: Dado k , aproximar \mathcal{P} mediante una curva poligonal C , cuyo número de codos sea menor o igual que k , de forma que el error cometido sea mínimo.

Este tipo de problemas admite diversas variantes que surgen al restringir la ubicación de los vértices de la poligonal o al considerar distintos tipos de error [55]. Haciendo una lectura desde el área de localización de servicios, podemos decir que se consideran dos tipos de errores aproximados,

$$e_2(C) = \max_{p_m \in \mathcal{P}} d_2(p_m, C), \quad e_v(C) = \max_{p_m \in \mathcal{P}} d_v(p_m, C)$$

donde $d_2(p_m, C)$ y $d_v(p_m, C)$ son, la distancia desde un punto a la poligonal inducida por la distancia Euclídea y por la distancia vertical, respectivamente. En la tesis doctoral [20] es donde se propone, por primera vez, utilizar los métodos de geometría computacional para aproximar una cadena poligonal $\{a = p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1} = b\}$ cuyos vértices son los puntos dados de entrada (puntos de demanda).

Criterio minimax. Describimos brevemente el método general para resolver el problema minimax con la restricción sobre el número de codos propuesto en [55]. En primer lugar se genera un conjunto de valores Γ de forma que el error cometido en la aproximación esté entre ellos. Para cada uno de estos valores e (errores candidatos), hallamos la curva poligonal $\mathcal{C}(e)$ con menor número de codos que se puede construir cometiendo un error menor o igual que e . A e le asociamos el número de codos de $\mathcal{C}(e)$. Finalmente, buscamos el menor $e \in \Gamma$ cuyo número de codos asociado sea menor o igual que k . La curva poligonal solución será $\mathcal{C}(e)$.

Los algoritmos más eficientes para resolver los problemas Min-# y Min- ϵ usando la distancia Euclídea, pueden encontrarse en [16]. Se obtienen complejidades temporales de $O(n^2)$ y $O(n^2 \log n)$ respectivamente. Además demuestran que si la curva a aproximar (los puntos de demanda en nuestro contexto) forma parte de la frontera de un polígono convexo, los dos problemas anteriores se pueden resolver en tiempo $O(n)$.

Por otro lado, la versión de los anteriores problemas utilizando la distancia vertical aparece en distintas disciplinas, no sólo en Investigación Operativa o en Análisis de Localizaciones, sino también en áreas como Estadística o Inteligencia Artificial. Dicho problema se conoce como *ajuste de una poligonal a un conjunto de puntos*.

El llamado *k-bend constrained fitting problem* aparece por primera vez en [49]. Se resuelven dos variantes del problema de encontrar una poligonal de k o menos codos atendiendo al criterio minimax con distancia vertical: cuando los vértices de C están en \mathcal{P} , *caso discreto*, y cuando los codos pueden estar sobre cualquier punto del plano, *caso libre*. Para ambos problemas se proponen algoritmos de tiempo $O(n^2 \log n)$ pero no trabajan en presencia de degeneraciones, es decir, no admiten puntos con la misma abscisa. El método es similar al usado en [55]. Con respecto al *caso libre*, en [81] se utiliza un ingenioso método de barrido usando dos líneas de barrido en vez de una, para reducir el tiempo a $O(n^2)$. También se ha propuesto en [47] la técnica de búsqueda paramétrica para resolver el problema en tiempo $O(n \log n)$.

En el contexto del análisis de localizaciones, tiene sentido encontrarse con puntos en posición degenerada. Puesto que el algoritmo de [49] no puede adaptarse para la eliminación de degeneraciones, en [23] se aplica un procedimiento alternativo de programación dinámica obteniéndose la misma complejidad temporal de $O(n^2 \log n)$ pero permitiendo posición degenerada de los puntos de entrada. Por otra parte, el algoritmo que resuelve el problema minimax discreto con la restricción sobre el número de codos puede ser adaptado para hallar la solución

didatas, y obtenerla en tiempo $O(n^2 \log n)$. En [80], se mejora la complejidad anterior hasta $O(n^2)$. Para el problema restringido en la longitud, en [33] se obtiene un algoritmo de tiempo $O(n^2)$, basado en propiedades geométricas de la solución óptima. Finalmente, con la técnica de búsqueda paramétrica de Megiddo, ambos problemas se resuelven en tiempo $O(n \log^2 n)$ en [21].

Criterio maximin. La ubicación de rutas nocivas que conecten dos puntos dados ha sido considerado recientemente por la comunidad de localización. La mayoría de los trabajos consideran espacios discretos. Problemas como caminos más cortos en redes, multiobjetivos, etc. se pueden encontrar en [1, 9, 10]. En el caso continuo existen trabajos recientes, algunos de los cuales están en desarrollo en la actualidad. En el caso continuo, el camino puede ser colocado en cualquier lugar del plano; por ello, para evitar soluciones triviales como por ejemplo, llevar la solución al infinito, se requiere restringir el espacio donde ubicar la poligonal. Otra restricción a considerar es la longitud de la poligonal. De ello se derivan dos tipos de problemas:

- *restricción espacial:* dada una región poligonal \mathcal{R} y un conjunto de puntos \mathcal{P} contenidos en \mathcal{R} , encontrar un camino poligonal C contenido en \mathcal{R} que maximice la función $h(C)$, i.e.,

$$\max_{C \subset \mathcal{R}} \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a, b\}} d(p_m, C).$$

- *restricción en la longitud:* dado un valor no negativo l_0 , encontrar un camino poligonal C de longitud menor o igual que l_0 que maximice la función $h(C)$, i.e.,

$$\max_{C: l(C) \leq l_0} \min_{p_m \in \mathcal{P} \setminus \{a, b\}} d(p_m, C).$$

Es necesario hacer notar que para los dos problemas anteriores, el número de codos no está fijado. En [37] se propone un algoritmo aproximado para determinar una ruta poligonal C contenida en una región poligonal. Más tarde en [50] se usa un método de aproximación similar utilizando la distancia inducida por la métrica l_1 . En [27] se propone un algoritmo exacto que utiliza diagramas de Voronoi, y lo resuelve en tiempo $O(n \log n)$. Finalmente, para solucionar el problema con restricción de longitud se usa un algoritmo ϵ -aproximado que hace uso de la resolución del problema del camino más corto entre objetos circulares [25].

7.5.2 Curvas poligonales de un codo

Criterio minimax. La aproximación de un conjunto de puntos por una curva poligonal de un codo tiene interesantes aplicaciones en la teoría de la aproximación y en estadística. Por ejemplo, podemos aproximar una población que está dividida en dos grupos con características distintas, utilizando el criterio minimax mediante dos rectas.

El problema del doble rayo centro se define como sigue: dado un conjunto de n puntos \mathcal{P} en el plano, encontrar la configuración $\mathcal{C} = (O, r_1, r_2)$, formada por un punto O y dos semirrectas r_1, r_2 , con origen común O (Figura 7.9), tal que la distancia desde \mathcal{P} a \mathcal{C} sea mínima. La distancia desde \mathcal{P} a \mathcal{C} se define como

$$h(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = \max_{p \in \mathcal{P}} \min[d_2(p, r_1), d_2(p, r_2)]$$

donde $d_2(p, r)$ es la distancia Euclídea desde el punto p hasta la semirrecta r .

En [46] se propone un algoritmo para hallar el doble rayo centro de \mathcal{P} (nótese que la configuración del doble rayo centro no es necesariamente única). El principal resultado teórico, que se muestra a continuación, permite la modificación de la configuración \mathcal{C} de un doble rayo en una configuración de un doble rayo especial.

Teorema 7.4. Sea \mathcal{C} la configuración de un doble rayo $\mathcal{C} = (O, r_1, r_2)$ con la distancia $d = h(\mathcal{P}, \mathcal{C})$. Entonces,

1. La anchura de \mathcal{P} es menor o igual que $4d$, o
2. \mathcal{P} se puede recubrir por dos bandas paralelas de anchura $2d$ cada una, sean (L_1, L_2) y (L_3, L_4) , tal que L_1 y L_4 pasan por puntos de la envolvente convexa de \mathcal{P} , $CH(\mathcal{P})$, y
 - a) L_1 o L_4 contienen una arista de $CH(\mathcal{P})$, o,
 - b) Las rectas que forman las fronteras de una de las bandas contienen puntos de \mathcal{P} , o
3. existe una configuración $\mathcal{C}' = (O, r'_1, r'_2)$ con distancia d , tal que existen cuatro puntos de \mathcal{P} que toman distancia d a \mathcal{C}' .

El Teorema 7.4 demuestra que el cardinal de la sucesión \mathcal{D} de todos los posibles valores de la distancia de Hausdorff d es $O(n^4)$. Por tanto, podemos encontrar la distancia óptima d^* realizando una búsqueda binaria sobre \mathcal{D} . Sin embargo, para buscar d^* de forma eficiente, se puede usar la técnica de búsqueda paramétrica de Megiddo. En [46] se demuestra que la versión secuencial del algoritmo de decisión se ejecuta en

tiempo $O(n^3\alpha(n))$ donde $\alpha(n)$ es la inversa de la función de Ackermann y que la versión paralela se ejecuta en tiempo $O(\log n)$ usando $O(n^3)$ procesadores. Así, aplicando el paradigma de búsqueda paramétrica, el problema del doble rayo centro se resuelve en $O(n^3\alpha(n)\log^2 n)$.

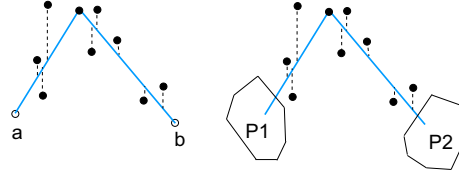


Figura 7.8. Poligonal anclada de un codo discreto.

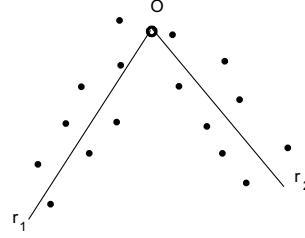


Figura 7.9. Doble rayo.

Por otro lado, recientemente se han desarrollado algoritmos eficientes para encontrar curvas poligonales de un codo. De hecho, en [24] se trabaja con variantes del problema utilizando la distancia vertical en lugar de la euclídea. Aunque se buscan curvas poligonales de un codo ancladas en dos puntos dados a y b , ellos demuestran que el algoritmo puede ser extendido para encontrar poligonales no ancladas. Se presentan algoritmos que consumen un tiempo de $O(n\log n)$ para resolver tanto el caso discreto (el codo es un punto de \mathcal{P} , ilustrados en las Figura 7.8) como el caso libre (el codo puede ser cualquier punto del plano). El siguiente resultado de [24] que utiliza la envolvente convexa del conjunto de puntos $CH(\mathcal{P})$, es crucial para la obtención de algoritmos eficientes:

Teorema 7.5. Sea \mathcal{P} un conjunto de puntos, ℓ y r los puntos de \mathcal{P} de menor y mayor abscisa, respectivamente. Se verifican las siguientes propiedades:

- (1) La máxima distancia entre \mathcal{P} y la recta ℓr se alcanza en algún vértice del polígono $CH(\mathcal{P})$;
- (2) La función distancia a la recta ℓr es unimodal sobre la frontera de la envolvente superior, y de forma análoga sobre la frontera de la envolvente inferior de \mathcal{P} .
- (3) Sea r^* la recta que pasa por ℓ desde la cual se minimiza la máxima distancia al conjunto \mathcal{P} : esta máxima distancia debe ser alcanzada en un vértice en la envolvente superior y en otro de la envolvente inferior.

En consecuencia, si la $CH(\mathcal{P})$ está ya almacenada en una apropiada estructura de datos anidada, r^* se puede obtener en tiempo $O(\log^2 n)$

usando búsqueda binaria. Sin embargo, una técnica que permite evitar la búsqueda binaria en estructuras anidadas es la conocida como *tentative prune-and-search*, descrita en [59]. Este procedimiento halla la solución del problema de la curva poligonal de un codo con la distancia vertical en tiempo $O(n \log n)$.

Criterio maximin. Con respecto al criterio maximin se han propuesto recientemente algoritmos eficientes para resolver el problema de la curva poligonal de un codo, con restricciones sobre su longitud, esto es, dada una cota l_0 , calcular la ruta poligonal C de un codo que conecte los puntos a y b , tal que $l(C) \leq l_0$ y para la cual $\min_{p \in \mathcal{P}} d_2(p, C)$ es máximo. Si llamamos *boomerang* al lugar geométrico de los puntos que equidistan de la poligonal una cantidad fija, el problema se reduce a encontrar el “mayor boomerang vacío anclado en a y b ”. En la Figura 7.10 se muestra la interpretación geométrica del problema y las distintas partes que componen un boomerang. En [27], se muestra que el problema puede ser resuelto mediante análisis de casos en tiempo $O(n^4)$, pero además proponen un algoritmo eficiente que hace uso de las propiedades geométricas de cada caso, obteniendo una cota temporal de $O(n \log n)$ cuando la longitud de la ruta nociva es exactamente l_0 (esto es, el codo se encuentra sobre la elipse de focos a y b) y $O(n^2)$ cuando la longitud puede ser menor o igual que la cota (esto es, el codo puede estar situado sobre la elipse o en el interior de ésta).

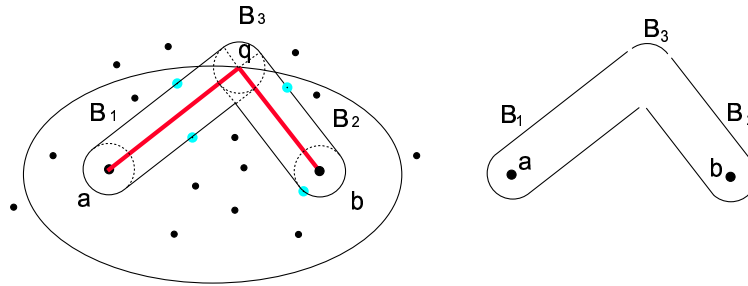


Figura 7.10. Interpretación geométrica del problema.

Finalmente, destacamos que en los trabajos [29, 36] se resuelven los casos no anclados para distintas variantes que provienen de considerar fijado o no el ángulo interior de los rayos que conforman la poligonal. Dichos problemas se han denominado *el problema del sifón* y *el problema del 1-corredor*.

7.6 Conclusiones y posibles líneas de investigación

En este capítulo se pretende dar una muestra del interés que supone la interpretación y resolución de problemas desde puntos de vista distintos. En este caso, en cómo cierto tipo de problemas de localización pueden enfocarse desde la óptica de la geometría computacional y utilizar los rudimentos de ésta para resolverlos computacionalmente de forma satisfactoria.

Este hecho era indiscutiblemente aceptado por la comunidad de investigadores de ambas áreas para problemas de localización puntual desde el comienzo del desarrollo de la geometría computacional (véase la tesis [73] que resultó ser el germen de este campo). Sin embargo, el hecho de considerar la ubicación de objetos y no de puntos complica aún más la posibilidad de resolver los problemas eficientemente sin ayuda de los patrones algorítmicos y las estructuras de la geometría. Debido a esto, podemos rescatar de la literatura reciente una gran cantidad de trabajos que dan fe de ello.

Resultaría de interés la realización de trabajos adicionales al aquí realizado en el que se analicen otros aspectos de la bondad de los algoritmos. En efecto, aquí nos hemos referido a una de las fases que conlleva el desarrollo de algoritmos geométricos: estudio de las propiedades intrínsecas de las soluciones y diseño de procedimientos. Otras fases, como la eliminación de posiciones degeneradas y adaptación de los algoritmos, para lo cual puede encontrarse bastante avance en la literatura [14, 41], o los problemas de robustez en la implementación constituyen una interesante línea futura de revisión.

Como posible línea de investigación futura puede citarse la localización de objetos 2-dimensionales en el plano, esto es, la localización de polígonos. Citamos a continuación algunas referencias que podrían ser consideradas como punto de partida de investigación. En [15] se plantea el problema de localizar y determinar las dimensiones de un rectángulo que minimiza la distancia media a un conjunto no finito de demanda. Usando diagramas de Voronoi, en [56] se trata el problema de localizar un polígono convexo en el interior de un polígono simple dado. El criterio considerado es maximizar la mínima distancia entre pares de puntos, uno de cada polígono. Recientemente, se ha abordado la localización de polígonos convexos con demanda modelada también por polígonos convexos en [12, 13, 68].

Otra posible línea futura de trabajo es la consideración de espacios continuos distintos al plano. En este sentido, existe ya un conjunto con-

siderable de trabajos que se están desarrollando paralelamente al avance de técnicas de geometría computacional en espacios más generales. Citamos aquí algunos de ellos, a riesgo de ser no rigurosos, con objeto de animar al lector a hacer investigación en este campo. Con respecto a la localización de rectas en espacios tridimensionales euclídeos podemos citar el trabajo [44] para el criterio maximin y [11] para el correspondiente minimax. En lo que se refiere a la ubicación óptima de planos en \mathbb{R}^3 , [54] trata el caso minimax y [30] el caso maximin. Un estudio reciente sobre localización de hiperplanos puede consultarse en [64, 76]. Finalmente, citamos un trabajo que acaba de ser publicado sobre problemas de localización en superficies poliédricas [7].

Agradecimientos

Los autores quisieran agradecer la ayuda al IV Plan Propio de la Universidad de Sevilla y al proyecto del Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2003-04062.

Bibliografía

- [1] Abkowitz M. y Cheng M. Developing a Risk/Cost Framework for Routing Truck Movements of Hazardous Materials. *Accident Analysis and Prevention*, 20:39–52, 1988.
- [2] Agarwal P.K., Aronov B. y Sharir M. Computing Envelopes in Four Dimensions with Applications. *SIAM Journal on Computing*, 26:1714–1732, 1997.
- [3] Agarwal P.K., Sharir M. y Toledo S. Applications of Parametric Searching in Geometric Optimization. *Journal of Algorithms*, 17:292–318, 1994.
- [4] Agarwal P.K. y Sharir M. Algorithmic techniques for geometric optimization. In *Computer Science Today: Recent Trends and Development, Lecture Notes in Computer Science*, 1000:234–253, 1995.
- [5] Agarwal P.K., Sharir M. y Toledo S. Applications of parametrics searching in geometric optimization. *Journal of Algorithms*, 17:292–318, 1994.
- [6] Agarwal P. y Sharir M. Efficient randomized algorithms for some geometric optimization problems. *Discrete Computational Geometry*, 16:317–337, 1996.

- [7] Aronov B., van Kleverd M., van Oostrum R. y Varadarajan K. Facility location on a Polyhedral Surface. *Discrete & Computational Geometry*, aparecerá en 2004.
- [8] Barcia J.A., Díaz-Báñez J.M., Lozano A. y Ventura I. Computing an obnoxious anchored segment, *Operations Research Letters*, 31:293–300, 2003.
- [9] Batta R. y Chiu S. Optimal Obnoxious Paths on a Network: Transportation of Hazardous Materials. *Opns. Res.*, 36:84–92, 1988.
- [10] Boffey B. y Karkazis J. Optimal Location of Routes for Vehicles: Transporting Hazardous Materials. *European J. Oper. Res.*, 201–215, 1995.
- [11] Brimberg J., Juel H. y Schöbel A. Linear Facility Location in Three Dimensions - Models and Solution Methods. Aceptado en *Annals of Operations Research*, 2003.
- [12] Brimberg J. y Wesolowsky G.O. Note: Facility Location with Closest Rectangular Distances. *Naval Research Logistics*, 47:77–84, 2000.
- [13] Brimberg J. y Wesolowsky G.O. Locating facilities by minimax relative to closest points of demand areas. *Computers & Operations Research*, 29:625–636, 2002.
- [14] Canny J. F. y Emiris I. Z. A General Approach to Removing Degeneracies *SIAM Journal of Computing*, 24(3):650–664, 1995.
- [15] Carrizosa, E., Muñoz-Márquez y Puerto, J. Location and shape of rectangular facility in \mathbb{R}^n . Convexity properties. *Mathematical Programming*, 83:277–290, 1998.
- [16] Chan W. S. y Chin F. Approximation of Polygonal Curves with minimum number of line segments or minimum error. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 6(1):59–77, 1996.
- [17] Cormen T., Leiserson C. y Rivest R. *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, 1990.
- [18] de Berg M., van Kreveld M., Overmars M. y Schwarzkopf O. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Second Edition, 2000.
- [19] Devillers O. y Ramos P. A. Computing Roundness is Easy if the Set is Almost Round. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 12(3):229–248, 2002.
- [20] Díaz-Báñez J.M. Location of Linear and Piecewise Linear Structures, *Ph.D. Thesis (in Spanish)*, Universidad de Sevilla. Sevilla. Spain. 1998.

- [21] Díaz-Báñez J.M. Approximating a point set by rectilinear paths), *VII Spanish Meeting of Computational Geometry* , Castellón, 1999.
- [22] Díaz-Báñez, J.M. El poder de la Geometría Computacional en la resolución de problemas de optimización. *Actas del Congreso Encuentros de Matemáticos Andaluces*, 2:395–404, 2001.
- [23] Díaz-Báñez, J.M., Gómez F. y Hurtado, F. Some Problems on Approximation of Set of Points by Polygonal Curves. *Proc. Tenth Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG98)*, pp. 10–12, Montreal, Canada, 1998.
- [24] Díaz-Báñez J.M., Gómez F. y Hurtado F. Approximation of Point Sets by 1-Corner Polygonal Chains. *INFORMS Journal on Computing*, 12(4):317–323, 2000.
- [25] Díaz-Báñez J.M., Gómez F. y Toussaint G. Anticovering shortest paths problems in the plane, *EWGLA*, Barcelona, 2000.
- [26] Díaz-Báñez, J.M., Gómez F. y Ventura I. The anchored Voronoi diagram *Lecture Notes in Computer Science*, 3045:207–216, 2004.
- [27] Díaz-Báñez J.M. y Hurtado F. Computing obnoxious 1-corner polygonal chains. *Proc. 10th Encuentros de Geometría Computacional*, pp 220–224, 2003.
- [28] Díaz-Báñez J.M., Hurtado F., Meijer H., Rappaport D. y Sellarès T. The largest empty annulus problem. In *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 13(4):317–325, 2003.
- [29] Díaz-Bañez J.M., López M.A. y Sellarès J.A. Finding a widest empty 1-corner corridor. *20th European Workshop on Computational Geometry*, 57–60, 2004.
- [30] Díaz-Bañez J.M., López M.A. y Sellarès J.A. Computing largest empty slabs. *Lecture Notes in Computer Science*, 3045:99–108, 2004.
- [31] Díaz-Báñez J.M. y Lozano A., La ponderación en problemas de optimización geométrica. *Actas del Congreso IX Encuentros de Geometría Computacional*, Gerona, 65–74, 2001.
- [32] Díaz-Báñez J.M. y Mesa J.A. Location of rectilinear center trajectories. *Top*, 6(2):159–177, 1998.
- [33] Díaz-Báñez J.M. y Mesa J.A. Fitting Rectilinear Paths to a Set of Points in the Plane. *European J. Oper. Res.*, 130(1):214–222, 2001.
- [34] Díaz-Báñez J.M., Mesa J.A. y Shöbel A. Continuous location of dimensional structures, *European Journal of Operational Research*, 152:22–44, 2004.
- [35] Díaz-Báñez J.M., Ramos P. y Sabariego P. The Maximin Line Problem with Polygonal Demand, *Actas de las VI Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, 2004.

- [36] Díaz-Bañez J.M., Seara C. y Ventura I. The siphon problem. *20th European Workshop on Computational Geometry*, 33–36, 2004.
- [37] Drezner Z. y Wesolowsky G.O. Location of an obnoxious route. *Journal Operational Research Society*, 40:1011–1018, 1989.
- [38] Ebara H., Fukuyama N., Nakano H. and Nakanishi Y., A Practical Algorithm for Computing the Roundness. *IEICE Transactions on Information and Systems*, E75-D:253–257, 1992.
- [39] Ebara H., Nakano H., Nakanishi Y. y Sanada T. A Roundness Algorithms Using the Voronoi Diagrams. *Transactions IEICE*, J70-A:620–624, 1987.
- [40] Edelsbrunner H. y Guibas L. Topologically sweeping an arrangement. *Journal of Computer and System Sciences* 38:165–194, 1989.
- [41] Edelsbrunner H. y Mücke E.P. Simulation of Simplicity: a Technique to Cope with Degenerate Cases in Geometric Algorithms, *ACM Transactions on Graphics*, 9(1):67–104, 1990.
- [42] Efrat A. y Sharir M. A Near-Linear Algorithm for the Planar Segment-Center Problem. *Discrete and Computational Geometry*, 16:239–257, 1996.
- [43] Elzinga J. y Hearn D.W. Geometrical solutions to some minimax location problems. *Trasp. Sci.*, 6:379–394, 1972.
- [44] Follert F., Schömer E., Sellen J., Smid M., Thiel C., Elzinga J. y Hearn D.W. Computing a largest empty anchored cylinder, and related problems. *Internant. J. Comput. Geom. Appl.*, 7:563–580, 1997.
- [45] García-López J., Ramos P. y Snoeyink J. Fitting a Set of Points by a Circle. *Discret Computational Geometry*, 20:389–402, 1998.
- [46] Glozman A., Kedem K. y Shpitalnik G. Computing a Double-Ray Center for a Planar Point Set. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 9(2):109–124, 1999.
- [47] Goodrich M.T. Efficient Piecewise-Linear Function Approximation Using the Uniform Metric, *Discrete & Computational Geometry*, 14:445–462, 1995.
- [48] Guibas L.J., Hershberger J.E., Mitchell J.S.B. y Snoeyink J.S. Approximating Polygons and Subdivisions with Minimum-Link Paths. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 3:383–415, 1993.
- [49] Hakimi S.L. y Schmeichel E.F. Fitting polygonal functions to a set of points in the plane. *Graphical models y image processing*, 53(2):132–136, 1991.

- [50] Hinojosa Y. Localización de una ruta lineal peligrosa. *Prepublicaciones de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla*, 9:32–43, 1995.
- [51] Hinojosa Y. Some problems in Location Theory. *Ph.D. Thesis, Universidad de Sevilla*, 2000.
- [52] Hinojosa Y. y Puerto J. The Polyhedral Norm Approach to the Problem of Locating Obnoxious Routes. *Studies in Locational Analysis*, 12:49–65, 1999.
- [53] Houle M.E. y Maciel A. Finding the Widest Empty Corridor Through a Set of Points. *Manuscript, McGill University*, 1988.
- [54] Houle, M.E. y Toussaint, G.T. Computing the width of a set. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(5):760–765, 1988.
- [55] Imai H. y Iri M. Polygonal Approximations of a Curve-Formulations and Algorithms. *Computational Morphology*. Editor G. T. Toussaint, North Holland, 1988.
- [56] Imai H., Imai K. y Takuyama T. Maximin location of convex objects in a polygon and related dynamic Voronoi diagrams. *Journal of the Operational Research Society of Japan*, 42:45–58, 1999.
- [57] Imai H., Lee D. T. y Yang Ch. 1-Segment Center Problem. *ORSA Journal on Computing*, 4:426–434, 1992.
- [58] Janardan R. y Preparata F.P. Widest-corridor problems, *Nordic Journal of Computing*, 1:231–245, 1994.
- [59] Kirkpatrick D. y Snoeyink J. Tentative prune-and-search for computing fixed points with applications to geometric computation. *Fundamenta Informaticae*, 22:353–370, 1995.
- [60] Klein R. Concrete and Abstract Voronoi Diagrams over Dynamic Scenes. *Lecture Notes in Computer Science*, 400, 1989.
- [61] Kurozumi Y. y Davis W.A. Polygonal Approximation by the Minimax Method. *Computer Graphics and Image Processing*, 19:248–264, 1982.
- [62] Lee D. T. y Lee V. B. Out-of-roundness problem revisited. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machinery Intelligence*, 13:217–223, 1991.
- [63] Lee D.T. y Wu Y.F. Geometric Complexity of Some Location Problems. *Algorithmica*, 1:193–211, 1986.
- [64] Martini H. y Schöbel A. Median and center hyperplanes in Minkowski spaces – a unified approach, *Discrete Mathematics*, 241:407–426, 2001.

- [65] Megiddo N. Applying parallel computation algorithms in the desing of serial algorithms. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 30:852–865, 1983.
- [66] Megiddo N. Linear-time Algorithms for Linear Programming in \mathbb{R}^3 and Related Problems. *SIAM Journal on Computing*, 12:759–776, 1983.
- [67] Morris J.G. y Norback J.P., Linear Facility Location - Solving Extensions on the Basic Problems. *European Journal of Operational Research*, 12:90–94, 1983.
- [68] Nickel S., Puerto J. y Rodríguez-Chía A.M. An approach to location models involving sets as existing facilities. *Mathematics of Operations Research*, 28:693–715, 2003.
- [69] O'Rourke J. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1994.
- [70] Pavlidis T. Algorithms for shape analysis of contours and waveforms. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Pami-2, 301–312, 1980.
- [71] Plastria F. Continuous location problems. *Facility location*, Drezner, Z. ed., Springer Verlag, Berlin, 225–262, 1995.
- [72] Robert J.M. y Toussaint G.T. Computational Geometry and facility location. *Technical Report SOCS 90.20*, McGill Univ., Montreal, PQ, 1990.
- [73] Shamos M.I. Computational Geometry. *Ph. D. Thesis, Dept. Computer Sci., Yale Univ.*, New Haven, 1978.
- [74] Sharir M. y Agarwal P.K. *Davenport-Schinzel Sequences and Their Geometric Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [75] Schöbel A. Locating least distant lines in the plane. *European Journal of Operational Research*, 106:152–159, 1998.
- [76] Schöbel A. Anchored hyperplane location problems. *Discrete & Computational Geometry*, 29(2):229–238, 2003.
- [77] Toussaint G. T. Solving geometric problems with the rotating calipers. *Proc. of IEEE MELECON*, A10.02-A10.05, Athens, Greece, 1983.
- [78] Toussaint G. T. On the Complexity of Approximating Polygonal Curves in the Plane. *Proc. IASTED, International Symposium on Robotics and Automation*, Lugano, Switzerland, 1985.
- [79] Ventura, I. Ubicación de estructuras nocivas en espacios continuos. Tesis doctoral en preparación, 2004.
- [80] Wang D.P. A new algorithm for fitting a rectilinear x-monotone curve to a set of points in the plane. *Pattern Recognition Letters* 23:329–334, 2002.

- [81] Wang D.P., Huang N.F., Chao H.S. y Lee R.C.T. Plane sweep algorithms for polygonal approximation problems with applications. *Lecture Notes in computer Science*, 762:515–522, 1993.