La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Tomás Recio

No es la primera vez que el flamenco se pasea por las páginas de esta Columna, pero también en esta ocasión viene de la mano del profesor Díaz-Báñez, del departamento (¡naturalmente!) de Matemática Aplicada II, de la Universidad de Sevilla. Además de sus tareas investigadoras en el ámbito de la Matemática Discreta y la Geometría Computacional, el profesor Díaz-Báñez desarrolla, desde el año 2004, el estudio de distintas propiedades de la música flamenca a través de herramientas matemáticas, un campo que él mismo denomina como «La Teoría Computacional del Flamenco». En la actualidad imparte dos cursos y dirige una tesis doctoral en el programa de doctorado «Estudios avanzados de flamenco: un análisis multidisciplinar», al tiempo que desarrolla, como podrá corroborar el lector a través de este ameno y sugerente artículo, una labor excelente como divulgador de esta novedosa área de investigación.

Sobre problemas de matemáticas en el estudio del cante flamenco

por

José-Miguel Díaz-Báñez

Resumen. Los lazos entre matemáticas y música existen, al menos, desde que los antiguos griegos comenzaron a formalizar los aspectos matemáticos de la música. En este artículo hablaremos de problemas de matemáticas que aparecen en el estudio de la música flamenca. Los temas de investigación musical que generan los problemas son: la búsqueda de *propiedades de preferencia* para los aficionados al flamenco, el cálculo de *similitud musical* y la simplificación o *transcripción automática* de melodías. Estas cuestiones pueden ser útiles para estudiar la naturaleza de la música flamenca y proporcionan, a la vez, ejemplos notorios para entender conceptos básicos de matemáticas. La colección de problemas presentada permite plantear tareas de trabajo docente y divulgativo para la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos y, por ende, pueden ser utilizadas para ampliar la perspectiva del público general respecto de las matemáticas.

«. . . La música es el inconsciente disfrute que experimenta el espíritu al contar sin darse cuenta de que está contando.»

Leibniz (1646–1716), filósofo, matemático, jurista y político alemán.

1. Introducción

Aunque es la sociedad quien crea y se recrea en los tópicos (la docencia de las matemáticas sufre el obstáculo del tópico frecuentemente), son los expertos y/o profesionales del campo los verdaderos responsables del mal uso de estos. El científico normalmente tiene asumido que, por definición, puede estudiar cualquier problema desde la lógica e instrumentación que usa: «. . . la ciencia no tiene límites, es cuestión de tiempo y dedicación. . . », justificaría un científico a un profano. Pero resulta sorprendente que parte de la comunidad científica, contradiciendo su definición, suele acotar los terrenos con alambradas alimentadas de tópicos o, cuanto menos, temiendo riesgos de fracaso al no seguir la tradición del área.

Una patología propia del individuo perteneciente a la comunidad de docentes e investigadores en matemáticas es pensar que lo más «matemático» o «con fundamento matemático» es lo que tiene apariencia «difícil» o «abstracta», y que solo los llamados a manipular la abstracción matemática pueden entender y usar las herramientas. Resultaría interesante realizar un experimento con individuos de la comunidad matemática española en el que se le preguntase por la primera impresión al leer el título de este artículo.

Siguiendo la máxima bien aceptada en el mundo flamenco de «quien hace grande el cante no es el estilo que se ejecuta, sino el cantaor que lo interpreta», de igual forma son los matemáticos y no la tipología de los problemas los que hacen «grande» la investigación o la docencia en el campo. Del mismo modo, la metodología usual en un área particular de las matemáticas no depende por completo del objeto o problema que se plantea. Por ejemplo, un problema de combinatoria, una vez que está bien definido, nos resulta interesante por sí mismo independientemente del área de aplicación desde donde se ha formulado, bien sea en robótica, en bioinformática o en un proyecto de juegos infantiles. Toda vez que el matemático formula o codifica el problema en su lenguaje, prescinde totalmente de donde viene y se pone manos a la obra.

En este artículo se propone una pequeña colección de problemas formulados matemáticamente que resultarían de interés para progresar en el conocimiento de la música flamenca, concretamente problemas de matemática discreta y computacional sugeridos en un estudio analítico (no compositivo) del «cante» flamenco. De igual modo, las otras formas de ejecución, a saber, «toque» y «baile» flamenco están a la espera de ser analizados desde el punto de vista matemático, y esperemos aumenten la colección de problemas a corto plazo.

Los problemas que aquí se relacionan han aparecido en el desarrollo del proyecto COFLA: análisis COmputacional de la música FLAmenca[1]. Algunos problemas ya han sido estudiados mientras otros constituyen cuestiones abiertas o en curso de

[1] `http://mtg.upf.edu/research/projects/cofla`

la investigación. La dificultad de las cuestiones varía ostensiblemente de unos a otros, pudiendo ser utilizados como tareas en el aula o proyectos de investigación, dependiendo del nivel requerido para abordarlos.

1.1. Matemáticas y música flamenca

A día de hoy podemos decir que el mundo universitario (y gran parte del no universitario) es consciente de la importancia de las matemáticas desde el punto de vista práctico, esto es, constituyen una herramienta indispensable, tanto para resolver problemas del mundo real como para interpretar propiedades que se dan en la naturaleza. En efecto, por un lado, las comunicaciones por telefonía móvil, las cámaras digitales, el uso de los cajeros automáticos de un banco, la predicción del tiempo, la televisión vía satélite, los buscadores en internet y, en general, la tecnología de uso diario, no serían posibles sin las matemáticas. Por otro, podemos usar el lenguaje matemático para dar una justificación coherente a fenómenos naturales. Pongamos como ejemplo el diseño hexagonal del panal de las abejas, que es hexagonal precisamente porque así se maximiza la capacidad y la resistencia del panal para el almacenaje de la miel. Asimismo, podemos hacer mención de las propiedades geométricas presentes en una gran variedad de obras de arte (arquitectura, pintura, etc.) como son: la razón áurea, los fractales, la proporcionalidad, la simetría (o asimetría), la perspectiva, etc.

Dentro del mundo de la música, encontramos la utilidad de las matemáticas desde las dos ópticas anteriores. Desde un enfoque más pragmático, podemos usarla en aplicaciones comerciales como la detección de plagios musicales o las aplicaciones de búsqueda de canciones por internet. En un marco más teórico, resulta bien conocido que desde la escuela pitagórica fluyen las matemáticas en casi cualquier concepto musical. Los matemáticos griegos establecieron las bases de la teoría musical actual y, desde entonces, matemáticas y música vienen de la mano, tanto en el terreno analítico como compositivo. Hay que notar en este punto que el estudio de la música ha brindado, en muchas ocasiones, problemas de interés para los matemáticos. Citamos los textos [20, 1, 33], donde se muestran distintas conexiones entre la música y las matemáticas.

La música flamenca, creada en Andalucía y con gran impacto internacional (declarada «Patrimonio inmaterial de la humanidad» por la Unesco[2]), puede ser considerada como un fenómeno musical con una identidad y originalidad dignas de ser estudiadas con métodos científicos. En este artículo planteamos varios problemas generados durante el desarrollo de un proyecto que analiza los ritmos y melodías del flamenco y analizamos posibles respuestas en base a un estudio que tiene a las matemáticas como operador de codificación. Nos centraremos en tres cuestiones fundamentales:

1. ¿Qué propiedades de interés o preferencia para los aficionados tienen los estilos del flamenco?

[2] `http://www.juntadeandalucia.es/cultura/iaf/opencms/portal/FlamencoPatrimonio/`

2. ¿Cómo comparar de forma automática dos ritmos o melodías del flamenco? o, de otra forma, ¿cómo obtener la similitud entre dos cantes?
3. ¿Cómo obtener una simplificación o transcripción de bajo nivel de un cante flamenco?

La búsqueda de *propiedades de preferencia* para las músicas de tradición oral podemos situarla en el área de la *etnomusicología*, disciplina científica denominada previamente como *musicología comparada*. El objetivo principal de la etnomusicología no es otro que estudiar las músicas del mundo o de tradición oral atendiendo a la dimensión cultural del entorno donde se desarrollan para comprender su estructura y las significaciones que los aficionados les atribuyen. Por propiedades de preferencias nos referimos aquí a las preferencias de los aficionados al flamenco, que están conectadas precisamente con aspectos culturales de la población o región a la que pertenecen. Para más información de sobre etnomusicología y etnomusicología computacional recomendamos consultar los monográficos [28] y [24], respectivamente.

Por su parte, el estudio de *similitud musical* se enmarca en el campo de la *tecnología musical*, la *musicología* y la *psicología*. Por un lado, está relacionado con aspectos de acústica (frecuencia fundamental, armónicos, energía, etc.). Por otro, el estudio de similitud requiere analizar aspectos musicales (ritmo, métrica, armonía, conducción de voces, fraseo, etc.). Por último, también se han de tener en cuenta variables psicosociales (emoción, carácter, aspectos socioculturales, etc.). Algunos trabajos destacados son [22] y [30].

Finalmente, el problema de la *transcripción automática* involucra áreas como la de *tratamiento de la señal*, *inteligencia artificial*, *psicología musical* o *extracción de información musical (MIR)*. El lector interesado en la transcripción automática del cante flamenco puede consultar el artículo [14].

Este tipo de cuestiones permiten, por otra parte, plantear tareas de trabajo docente y divulgativo en ambos sentidos, esto es, tanto para los estudios de música como para la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles educativos. En definitiva, pueden ser utilizadas para ampliar la perspectiva del público general respecto de las matemáticas y también del flamenco, a veces considerado como música menor por quien la desconoce.

2. Un breve apunte sobre los cantes flamencos

Realizamos en esta sección una breve introducción al mundo de la música flamenca con el objetivo de enfocar al lector no aficionado en el marco de las peculiaridades de este arte. Ante todo, debemos observar que, como música de tradición oral, el flamenco se crea, desarrolla y transmite de forma diferente e independiente de la música occidental o clásica. Por tanto, ha desarrollado sus propias reglas e incluso su propia jerga o lexicón. De igual forma, las prioridades, la evaluación y gusto por una interpretación no coincide necesariamente con las valoraciones en otras músicas.

Debido a que los problemas mencionados aquí han sido sugeridos en el estudio de aspectos rítmico-melódicos del *cante*, solo nos referiremos a conceptos básicos de ritmo y melodía. Para una descripción más detallada de otros conceptos como armonía, estructura, forma, métrica o temática, pueden consultarse los manuales [13, 12]. Aspectos fundamentales que conviene resaltar para introducirse en el contexto musical flamenco son: el *compás*, la *ornamentación* y la *improvisación*. En todos se da el fenómeno paradójico de la «obligación» frente a la «libertad». Lo explicamos someramente sin ánimo de formalización ni rigor.

Sobre compás: Los cantes flamencos (nótese que no se dice cantos sino cantes) están ajustados a un metro rítmico (compás) que se repite periódicamente, que no es más que una distribución de acentos en una secuencia corta de pulsos. Resulta crucial para el cantaor ajustar las frases a ese ciclo periódico de acentos, y una de las peores críticas de los aficionados flamencos reside en lo que denominan «ir atravesado», esto es, ir desajustado con respecto al compás. Por otra parte, toda vez que el intérprete tiene «interiorizado» el compás, puede realizar juegos de tempo usando recursos como silencios, fraseos largos, etc., que enriquecen el colorido rítmico de la ejecución. Se conjuga, por tanto, sometimiento y libertad en el ritmo.

Sobre ritmo y compás en flamenco, hay que aclarar que hablaremos de compás cuando nos referimos al patrón de acentos (secuencia de palmas o golpes fuertes) que se repite a lo largo del cante (se puede observar en la guitarra o en la percusión). Sin embargo, el ritmo es un concepto más amplio, se refiere a la forma (o «juego» temporal) con la que se interpreta el cante, el toque o el baile a partir de un metro o compás estricto. Es usual, de todas maneras, que se hable de compás o ritmo indistintamente para referirse a cualquiera de los dos conceptos.

La rítmica flamenca presenta tres tipos de compases o distribuciones de acentos: *binario* (acento fuerte cada 2 o 4 tiempos), *ternario* (cada 3 tiempos) y *«de amalgama»*, siendo este una combinación de los anteriores, y que resulta el más característico y singular en el flamenco. En las figuras 1 y 2 se representan los patrones rítmicos ternarios del flamenco con la notación de caja y numérica, respectivamente. Los acentos (golpes) fuertes se colocan en los lugares señalados. El lector puede ejecutarlos tocando palmas fuertes en los lugares señalados en negrita y palmas débiles en los no señalados. Hemos etiquetado cada compás con un estilo o palo flamenco que lo utiliza, aunque no son exclusivos del estilo etiquetado. Por ejemplo, el esquema del *fandango* se usa en *sevillanas*, a veces en *bulerías*. El esquema de *soleá* se usa también en *alegrías*, el de *guajira* en *peteneras*, etc.

Sobre melodía: La información que disponemos sobre la procedencia de las melodías del flamenco es escasa. Algunas melodías proceden de canciones populares o folclóricas que los cantaores adaptaron a la estética flamenca, y otras pueden ser atribuidas a los propios intérpretes. Como ejemplo de las primeras podemos citar la melodía de las *peteneras*, y como paradigma de la creación personal citamos los *fandangos personales*, que toman a veces el nombre de la localidad donde se desarrolló y, otras, el nombre del artista o supuesto creador (fandango de Huelva, de Alosno, fandango del Niño Gloria, del Carbonerillo, de Chocolate, etc.).

Destacamos en las melodías flamencas el uso continuado de ornamentación, melismas (ejecución de varias notas en la misma sílaba) y la falta aparente de regularidad rítmica. Esto último se debe a que el ritmo melódico del cante no suele seguir estrictamente el metro o compás que marca la percusión y la guitarra, aunque la frase

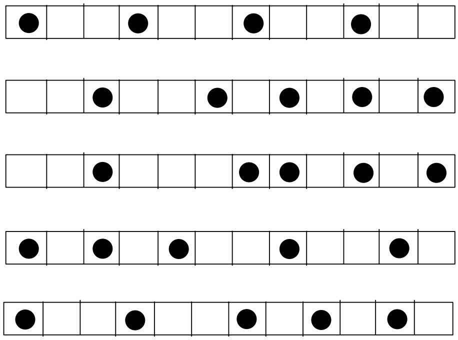

Figura 1: Notación de cajas. Cinco patrones rítmicos de 12 tiempos.

[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 9 **10** 11 12] - *fandango*

[1 2 **3** 4 5 **6** 7 **8** 9 **10** 11 **12**] - *soleá*

[1 2 **3** 4 5 6 **7** **8** 9 **10** 11 **12**] - *bulería*

[**1** 2 **3** 4 **5** 6 7 **8** 9 10 **11** 12] - *seguiriya*

[**1** 2 3 **4** 5 6 **7** 8 **9** 10 **11** 12] - *guajira*

Figura 2: Notación numérica de los patrones rítmicos ternarios del flamenco.

melódica ha de terminar con el compás en cada ciclo. Por otra parte, debemos notar que, aunque existe un patrón melódico establecido en cada cante, la interpretación de las melodías presenta variaciones sobre el patrón que dependen de las facultades o preferencias estéticas del cantaor o de la escuela de cante a la que pertenece el intérprete. En efecto, podemos oír el mismo cante (con la misma letra) interpretado de forma diferente por Antonio Mairena o Camarón de la Isla. Esto se debe, en gran parte, al uso personal del fraseo (organización de frases), ornamentaciones y al timbre, que le dan al cante flamenco una estética fácil de reconocer y diferenciar con otras músicas cantadas. En cualquier caso, como factor común a las melodías flamencas podemos identificar cierto tipo de motivos ornamentales y de fraseo que lo hacen interesante como objeto de estudio musicológico. Finalmente, hacemos notar aquí que, desde el punto de vista de la *tecnología musical* (área que estudia la música usando programas informáticos), la ornamentación barroca del flamenco dificulta la separación automática de las *notas principales* (patrón melódico) y los *adornos* (melismas) [16, 15].

3. Representación geométrica de ritmo y melodía

3.1. Compás

Para analizar la música del flamenco necesitamos una codificación de los parámetros musicales que deseamos estudiar. En el caso del ritmo, ya vimos en la sección anterior dos posibles notaciones de los patrones rítmicos: notación *numérica* y de *cajas*. Veremos ahora dos notaciones (transcripciones o anotaciones) geométricas: la *cronotónica* y la *poligonal*.

La *representación cronotónica* o de *histogramas* fue propuesta, en un principio, para el reconocimiento automático de la voz [19]. Consideremos el patrón del ritmo de la seguiriya, dado por [**1** 2 **3** 4 **5** 6 7 **8** 9 10 **11** 12]. En esta representación numérica, las duraciones relativas de los espacios de tiempo entre dos acentos consecutivos no se pueden observar fácilmente. El tiempo que separa un acento (ataque

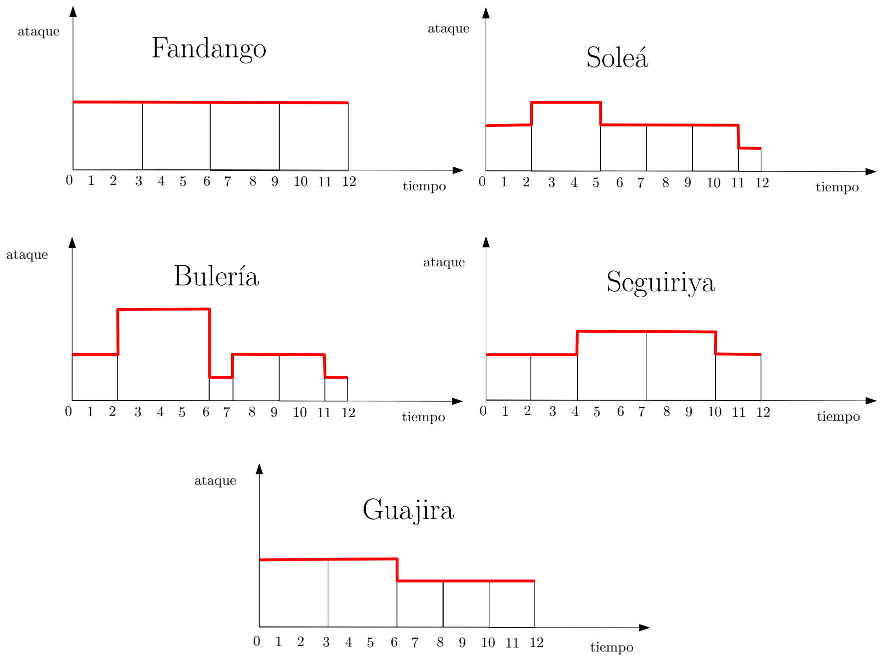

Figura 3: Representación cronotónica de patrones ternarios flamencos.

musical) del siguiente determina la dinámica del ritmo. Para obtener una representación gráfica que no pierda la información temporal, tomamos el tiempo entre cada dos ataques (acentos) en dos dimensiones, tal como se ilustra en la figura 3. Nótese que se pretende visualizar el tiempo de espera entre cada dos acentos en ambas direcciones (horizontal y vertical), y en cada eje se comienza en tiempo 0 (cronómetro). Cada espacio temporal entre acentos (*intervalo rítmico*) se representa como una caja bidimensional y ambos ejes, x e y, representan la longitud temporal del intervalo. Las uniones de los cuadrados representados en la figura 3 se pueden ver como *funciones escalonadas monótonas* del tiempo que representan el perfil o comportamiento temporal del compás con respecto al «tiempo de espera» entre dos acentos consecutivos.

La *representación poligonal* parte de considerar los doce pulsos del compás como puntos equidistantes en un círculo, de forma que podemos imaginar un collar de perlas blancas (acentos débiles) y negras (acentos fuertes) en forma o diagrama de reloj (figura 4). Esto tiene sentido porque el compás se repite en el tiempo (periódicamente). Si unimos cada dos acentos fuertes consecutivos del compás nos aparece el *polígono* cuyos vértices son precisamente esas perlas negras. En la representación poligonal de la figura 4, el «1» marca la posición en la cual comienza el patrón rítmico y los vértices indican dónde están los acentos. La representación de las notas de una escala musical mediante un polígono en un diagrama de reloj aparece ya en un artículo publicado en 1937 por E. Krenek [25]. La usamos aquí para visualizar los compases del flamenco.

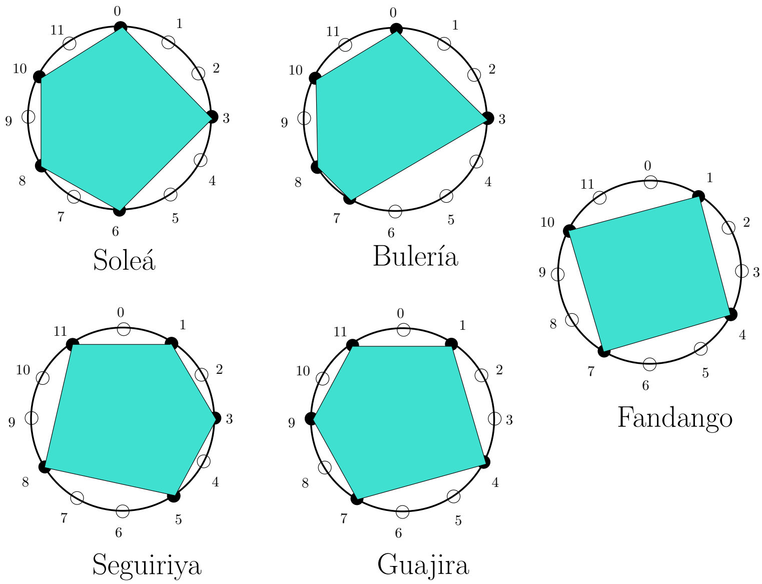

Figura 4: Cinco compases ternarios del flamenco.

3.2. Melodía

La *melodía* es el parámetro determinante en una canción. De hecho, el término melodía proviene del griego *meloidía* ($\mu\varepsilon\lambda\omega\delta\acute{\iota}\alpha$), que significaba «canto coral» y se identifica con la canción en sí[3].

Una melodía nos puede venir representada en formato simbólico (cadena de caracteres) o de audio (curva de frecuencias o alturas que provienen de la señal del sonido). Como formatos simbólicos destacamos las transcripciones en partituras o un fichero MIDI. El formato simbólico lo denominamos *discreto* (cantidad finita de datos), y el de audio se corresponde con el caso *continuo* (viene dado por una curva de frecuencias). Puesto que resulta más adecuado el análisis musical de representaciones discretas, han sido propuestas diversas «simplificaciones» de la melodía cuya naturaleza depende del estudio que se desea realizar. Por ejemplo, no se requieren los mismos detalles en la transcripción de una melodía para discriminar dos canciones distintas o dos interpretaciones de la misma canción. La representación simbólica más simple de una melodía consiste en una cadena de símbolos del alfabeto compuesto por las notas musicales, por ejemplo, la cadena CDE representa la secuencia melódica «Do Re Mi».

[3] Resulta curioso que los mariachis en México usan el término melodía para referirse a una canción.

Una melodía puede definirse de forma discreta como una sucesión de sonidos que incluye alturas y duraciones, esto es, una sucesión de frecuencias de sonido con un ritmo asociado que se percibe como una sola identidad. De esta forma, una melodía puede representarse, de manera simplificada, como una sucesión de pares $M = \{(t_1, f_1), (t_2, f_2), \ldots, (t_n, f_n)\}$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, donde n se identifica con la longitud de la melodía. Puesto que esta representación no es invariante a cambios de altura o de tempo musical, también se usa la representación por intervalos, esto es, $I_1 = (t_2 - t_1, f_2 - f_1), I_2 = (t_3 - t_2, f_3 - f_2), \ldots, I_{n-1} = (t_n - t_{n-1}, f_n - f_{n-1})$, y entonces $M = \{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}\}$. La importancia de la representación por intervalos estriba en que, a veces, es importante la dirección en la que se orienta la melodía (*dirección melódica*). Si unimos los puntos del conjunto discreto $M = \{(t_i, f_i)\}$ obtenemos una curva poligonal que se conoce por el nombre de *contorno melódico*. Nótese que un aspecto clave del comportamiento de la melodía lo constituyen los *picos* o extremos de la función poligonal (lineal a trozos). Pongamos un ejemplo con un cante flamenco monofónico, la *debla* «En el barrio de Triana». En la figura 5 se ilustra la señal de audio (parte superior) y la frecuencia fundamental (parte inferior). En la parte inferior se representa una segmentación (simplificación de la melodía). Los datos para esta segmentación en el intervalo de tiempo $[0, 8]$, esto es, la primera frase melódica, son $M = \{(0{,}2, 385), (0{,}4, 407), (2{,}2, 407), (3, 385), (3{,}3, 407), (4{,}3, 385), (4{,}7, 407), (5{,}2, 385), (5{,}8, 407), (6{,}1, 385), (6{,}5, 330)\}$. En notación de intervalos, cada punto bidimensional será de la forma $(\Delta(t_i), \Delta(f_i))$ y podemos trazar el contorno melódico uniendo los puntos.

Para concluir, una melodía puede representarse de diversas formas dependiendo de la información que queremos extraer, pudiendo ser una función continua, escalonada (ventana inferior en la figura 5) o poligonal monótona en el tiempo.

4. Ritmos regulares. Problemas de optimización

4.1. Ritmos de máxima área

Una de las propiedades que los musicólogos y matemáticos han observado en distintas músicas de tradición oral es la denominada *regularidad del ritmo* (o de la escala musical). Como ritmos regulares se han definido aquellos que maximizan cierta medida geométrica. Por ejemplo, atendiendo a la representación poligonal de un ritmo, podemos considerar como medida de regularidad la *Suma* de las distancias entre cada par de acentos (perlas negras del collar), o bien el *Área* del polígono rítmico. De esta forma, podemos hacer la siguiente pregunta:

Problema 1: Pentágono inscrito de máxima regularidad. *Dada una medida de regularidad (Área, Suma, . . .) y 12 puntos uniformemente distribuidos en un círculo, ¿cuál es la elección de 5 de esos puntos de forma que el pentágono que determinan maximice la medida?*

Este tipo de problemas involucra campos matemáticos como la combinatoria y la geometría, y han sido tratados por los matemáticos desde hace bastante tiempo. En 1956, el matemático húngaro F. Tóth [32] estudia el caso continuo. Tóth prueba

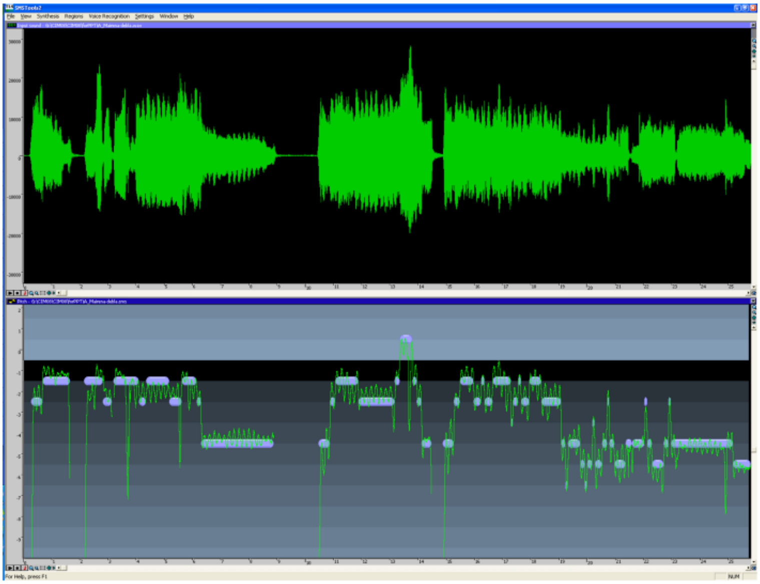

Figura 5: Transcripción automática de una frase melódica flamenca.

que un conjunto de n puntos sobre un círculo que maximizan la suma de las distancias entre cada par de puntos se encuentra precisamente en los vértices de un polígono regular de n lados. Dicho de otro modo, los vértices están distribuidos tan regularmente como sea posible sobre la circunferencia del círculo. Con respecto al criterio de *máxima área*, usando geometría elemental puede probarse que para $n = 3$ (tres puntos) se cumple que el triángulo de área máxima inscrito en un círculo es un triángulo regular, esto es, equilátero[4]. Usando argumentos geométricos, que no trataremos en este trabajo, puede probarse el caso general, esto es, *El polígono de n vértices inscrito en un círculo que maximiza el área es un polígono regular (cuadrado para $n = 4$, pentágono regular para $n = 5$, etc.).*

El caso que nos ocupa en la música corresponde a lo que llamamos la *versión discreta* del problema, esto es, la elección de los vértices del polígono se hace sobre un conjunto de puntos fijados de antemano (Problema 1). El problema discreto general se formula así:

Problema 2: Polígono inscrito de máxima área. *Considera un círculo con n puntos equidistantes situados sobre su circunferencia. ¿Cómo elegir $k < n$ de esos puntos de forma que el polígono que generan los k vértices sea de área máxima entre todas las posibles elecciones de los k puntos?*

En el caso de los ritmos flamencos tenemos $n = 12$ y $k = 4$ (fandango) o $k = 5$ (soleá, bulería, seguiriya y guajira).

[4]Este problema puede probarse formalmente por «reducción al absurdo» en cursos de E.S.O.

Veamos a continuación la prueba de que el polígono que representa al compás de soleá es el pentágono de máxima área. Puesto que los 12 puntos están distribuidos uniformemente sobre la circunferencia, el área de un polígono inscrito puede escribirse como suma de triángulos anclados en el centro O del círculo (figura 6). Estos triángulos son isósceles (el radio del círculo es la longitud de dos de sus lados). El ángulo interior que corresponde al vértice que está en el centro del círculo es, de hecho, de 30 grados. De esta forma, la distribución de 5 puntos negros elegidos de entre los 12 puede ser codificada por un vector que indique la cantidad de triángulos que hay entre cada dos acentos consecutivos. Por ejemplo, soleá puede denotarse por 33222 y bulería por 34122. Para probar que soleá tiene más área que bulería basta ver la desigualdad para las áreas de los polígonos que están marcados en la figura 6 (puesto que el resto del área es la misma para los dos compases). Notamos aquí que, aunque esto es visualmente palpable, se requiere una prueba formal pues la percepción visual puede ser engañosa. Para la prueba formal se propone usar trigonometría básica. Es fácil comprobar que el área del triángulo $O78$ (de vértices el centro O, y los puntos 7 y 8) es exactamente la mitad del seno de 30 grados, esto es, $A_{O78} = \frac{\operatorname{sen} 30^{\mathrm{o}}}{2}$. De igual forma, el área del triángulo $O68$ es $A_{O68} = \frac{\operatorname{sen} 60^{\mathrm{o}}}{2}$. Por tanto, el área del polígono marcado para el caso de soleá es

$$A_{O68} + A_{036} = \frac{\operatorname{sen} 60^{\mathrm{o}}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 90^{\mathrm{o}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}.$$

Para el polígono marcado en el caso de la bulería, tenemos

$$A_{O78} + A_{O37} = \frac{\operatorname{sen} 30^{\mathrm{o}}}{2} + \frac{\operatorname{sen} 120^{\mathrm{o}}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

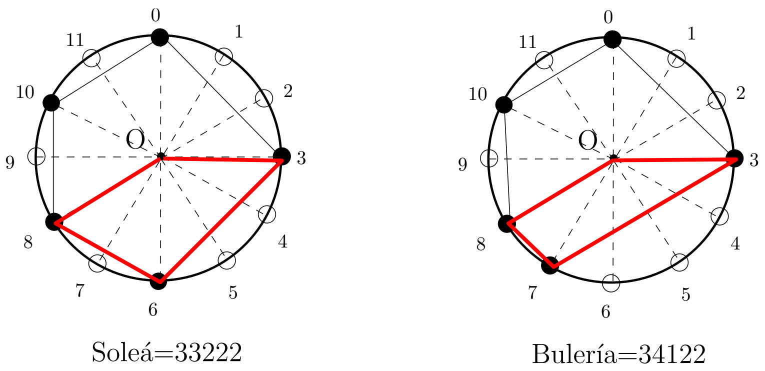

Figura 6: Soleá tiene más área que bulería.

Queda entonces probado que el área del polígono que representa la soleá es superior al área del que representa la bulería. De hecho, no es difícil probar que la representación 33222 es la de mayor área posible salvo permutaciones (el área de 32322 es la misma que 33222 pues se trata de permutar dos triángulos). Nótese que una distribución distinta a una que contiene dos «3» y tres «2» tendría que contener un «4» y un «1», y que, colocando como vecinos los triángulos de «4» y «1», pueden transformarse en dos triángulos, uno de «3» y otro de «2» que, como hemos visto, suman mayor área. Como consecuencia de lo anterior, las distribuciones de 5 puntos 33222 y 32322 son las de mayor área. Los ritmos soleá, seguiriya y guajira se corresponden con 33222, donde el inicio del compás es distinto en casa caso. Por tanto, soleá, seguiriya y guajira son de máxima área, pero bulería no. El ritmo del fandango es también de máxima área sobre todas las elecciones de 4 puntos entre doce equidistantes en la circunferencia. Como conclusión, y de cara a la aplicación musicológica, podemos decir que la mayoría de los ritmos flamencos cumplen la propiedad de «máxima área» y el compás bulería[5] no sigue el concepto de regularidad de los demás. Faltaría hacer un estudio con sujetos (aficionados y no aficionados al flamenco) para confirmar o no la teoría de que la propiedad de máxima área es de preferencia en el flamenco. Para una descripción de otras propiedades de preferencia puede consultarse [8].

4.2. Minimizando el máximo silencio. El problema minmax

Consideremos ahora el problema anterior de máxima área como un problema geométrico de aproximación de polígonos. Dado el dodecágono regular cuyos vértices son los 12 puntos del diagrama de reloj, podemos considerar su diferencia con respecto al polígono de soleá. En la figura 7 se ilustra la diferencia de área entre estos dos polígonos como la suma de las áreas de polígonos que quedan entre cada dos vértices de soleá (llamamos «orejas» a estos polígonos). Nótese que maximizar el área de un polígono de 5 vértices es equivalente a minimizar la suma de las áreas de las orejas. Si denotamos los polígonos oreja por sus vértices extremos, en la figura 7 tenemos que minimizar el área $A(0,3)+A(3,6)+A(6,8)+A(8,10)+A(10,0)$. Este criterio podemos denominarlo *minsum*, pues minimiza la suma de las áreas restantes.

Consideremos ahora otro criterio (habitual en optimización geométrica) conocido como criterio *minmax* y cuyo objetivo es minimizar el máximo, esto es, minimizar el área de la mayor oreja. Esto podemos interpretarlo musicalmente como que se desea tener silencios de la menor duración posible entre dos notas consecutivas. Claramente, el patrón rítmico bulería no se ajusta al criterio minimax, pues su mayor oreja tiene 5 vértices y es posible encontrar otro ritmo cuya mayor oreja tiene menos área (soleá, seguiriya y guajira). El problema matemático en esta sección es:

Problema 3: Mayor silencio mínimo. *Considera un círculo con n puntos equidistantes situados sobre su circunferencia. ¿Cómo elegir $k < n$ de esos puntos de forma que el polígono que generan los k vértices minimice el área de la mayor oreja de entre todas las posibles elecciones de k puntos?*

En el caso del flamenco resulta evidente que el polígono soleá es solución del problema anterior, pues no se puede obtener una configuración de 5 vértices con una oreja de menos de 4. En general, para n y k cualesquiera, es fácil ver cómo encontrar

[5]Resulta de interés notar que este metro rítmico, conocido como «soniquete moderno», se usa fundamentalmente al cantar la *bulería por soleá*, que es un híbrido entre bulería y soleá.

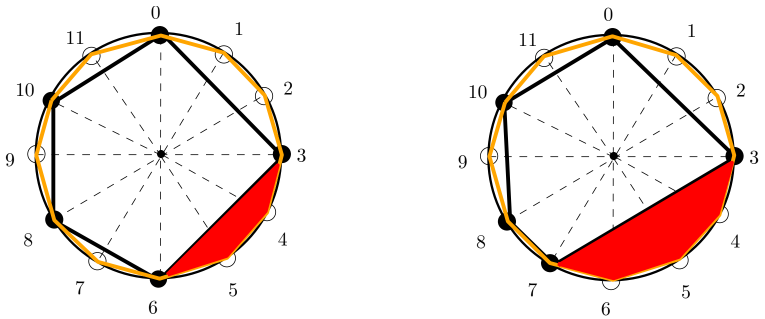

Figura 7: Soleá tiene el mayor silencio (oreja) más pequeño que bulería.

los polígonos que satisfacen el criterio minmax. Lo vemos aquí particularizado para $n = 12$ y $k = 5$ con objeto de que el lector lo pueda generalizar.

Dado un polígono Q inscrito en el círculo con k $(= 5)$ vértices sobre los n $(= 12)$ puntos dados, diremos que Q tiene longitud $\mathcal{L}$ si la mayor subcadena de puntos entre dos vértices consecutivos de Q tiene exactamente $\mathcal{L} + 1$ vértices. En nuestro ejemplo, soleá tiene longitud 3 y bulería longitud 4. Realmente, la longitud coincide con el número de vértices de la mayor oreja menos uno (no contamos el último). Pues bien, tenemos 12 puntos, 5 subcadenas (orejas) y el teorema del resto: $n = k \cdot q + r$ con $0 \leq r \leq k - 1$. En nuestro caso, $12 = 5 \cdot 2 + 2$. Por el *principio del palomar* ha de haber, al menos, una subcadena con $\lceil \frac{12}{5} \rceil = 3$ puntos. El principio del palomar, también conocido como de Dirichlet, dice que si tenemos n palomas y $k < n$ palomares, al menos un palomar ha de tener $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ palomas. Para visualizarlo en nuestro caso, tomamos las perlas negras como palomares y todas las perlas como palomas. Entonces, ha de existir al menos una perla negra seguida de dos perlas blancas. Dicho de otro modo, el polígono solución tiene una oreja de longitud 3 y, por tanto, cualquier combinación de cinco vértices que tenga como máximo esa longitud corresponde a un polígono óptimo, esto es, que minimiza la máxima oreja. Por tanto, cualquier distribución de 5 puntos conteniendo dos «3» y tres «2» nos vale, por ejemplo 33222 (soleá) o 32322 (que no corresponde a ningún ritmo flamenco).

5. Medidas matemáticas de similitud. Comparando dos cantes flamencos

Esta cuestión resulta crucial cuando se plantea un método científico para investigar sobre el origen y evolución de las músicas de tradición oral. De igual forma, resulta de utilidad si estamos interesados en establecer una clasificación de estilos musicales. El concepto crucial en este estudio es lo que se conoce como *similitud musical*. El análisis de similitud musical constituye un área apasionante de investigación donde podemos encontrar multitud de problemas matemáticos de gran interés. Basta decir que la similitud se calcula en base a una *medida* o *distancia* entre dos interpretaciones musicales, y el concepto de distancia entre dos objetos está bien formalizado en matemáticas. En la práctica, el cálculo de la similitud es un problema difícil de abordar puesto que entran en juego elementos subjetivos como la percepción y el contexto socio-cultural. Para tener una idea del peso de este concepto fuera de las matemáticas, señalamos su uso actual en la resolución de conflictos judiciales de propiedad intelectual (copyright) en Estados Unidos [3]. Aunque se han propuesto medidas de similitud desde las matemáticas, conviene resaltar que no basta con definirlas teóricamente, sino que se requiere validación perceptual, esto es, experimentos con grupos de personas que demuestren que las medidas se ajustan a la similitud perceptual de los aficionados. Un estudio de medidas matemáticas de similitud rítmicas puede consultarse en [23, 31, 17].

5.1. Similitud rítmica

Haremos referencia a dos medidas de similitud, que fueron presentadas en [10] y dan buenos resultados en el caso de los compases flamenco: la *distancia cronotónica* y *la distancia de permutación.*

5.1.1. Calculando área: distancia cronotónica

La distancia cronotónica fue propuesta por Gustafson [18], en el campo de la *fonética*, para medir la similitud entre dos grabaciones de habla (reconocimiento de voz). Si tenemos dos patrones rítmicos representados en forma cronotónica, tal como ilustrábamos en la figura 3, la distancia cronotónica se define como el área de la diferencia de dichas representaciones. Pongamos un ejemplo: si superponemos las representaciones cronotónicas de fandango y seguiriya, el área comprendida entre ellas es igual a 6 (véase la figura 8). De esta forma, podemos obtener la distancia o *disimilitud* cronotónica, d_c, entre cada dos ritmos del flamenco, y obtenemos la tabla o matriz (simétrica) que contiene la información del «parecido» o similitud entre los compases flamencos atendiendo a esta medida (cuadro 1).

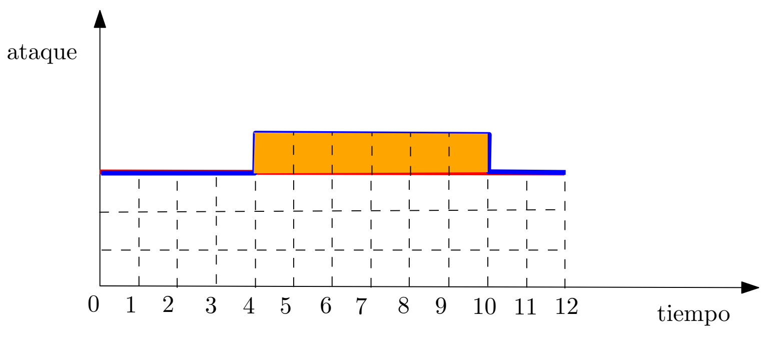

Figura 8: Distancia cronotónica entre fandango y seguiriya.

d_c	Soleá	Bulería	Seguiriya	Guajira	Fandango
Soleá	0	6	8	4	10
Bulería	6	0	12	8	14
Seguiriya	8	4	0	8	6
Guajira	4	8	8	0	6
Fandango	10	14	6	6	0
$\sum$	28	**40**	34	**26**	36
Máx	10	14	12	**8**	14

Cuadro 1: Tabla de distancias cronotónicas.

Si sumamos las columnas de la matriz de similitud obtenemos las distancias de cada patrón rítmico a los demás. Esta cantidad, denotada por $\sum$ en la tabla, nos da un dato numérico de lo «cercano» o «alejado» que está una distribución rítmica con respecto a las demás. De este modo, si tomamos como criterio de cercanía la suma de distancias, podríamos decir que el compás de bulería es el más «alejado» a los demás y el compás guajira el más «cercano».

Otro criterio consiste en tomar el máximo de las distancias en lugar de la suma. El resultado para cada compás se ha denotado por *Máx* en el cuadro 1. Atendiendo al criterio de distancia máxima, el compás más cercano a los demás es nuevamente el de guajira. Una posible interpretación musicológica de estos cálculos sugiere que el patrón de la guajira representa el *prototipo* de la mezcla rítmica que supone la identidad de los ritmos del flamenco. En todo caso, esto no deja de ser un estudio piloto sobre patrones rítmicos que requiere un estudio musical completo aderezado con información histórico-cultural de la música en cuestión.

5.1.2. Calculando intercambios: distancia de permutación

Una permutación puede afectar a dos términos no necesariamente consecutivos de una serie o sucesión de elementos. En el caso de considerar permutaciones de elementos consecutivos, a la permutación la denominamos *intercambio*. Notemos que el patrón que hemos llamado bulería difiere de la soleá en un intercambio entre los posiciones 6 y 7 (figura 9).

Esta mínima operación resulta un cambio importante en la percepción musical de la pieza y, por tanto, es digna de ser tenida en cuenta como modificación entre los patrones rítmicos del flamenco. Precisamente, usaremos esta operación al estudiar los mecanismos de similitud rítmica. Cabe destacar que este «soniquete moderno», el patrón que hemos etiquetado como bulería (muy común cuando se canta *bulería por soleá*), posee una estética sonora especial, pues el intercambio realizado supone crear un estado de silencio desde la posición 3 a la 7, y después se experimenta un estado de tensión en las posiciones 7 y 8 con dos acentos fuertes consecutivos. Esta forma de distribuir los acentos (fraseo percusivo) imprime al patrón de palmas un efecto de tensión-resolución que dota al cante, toque y baile de una estética con claro «sabor flamenco». Este tipo de cambios pudieran estar presentes en el proceso compositivo

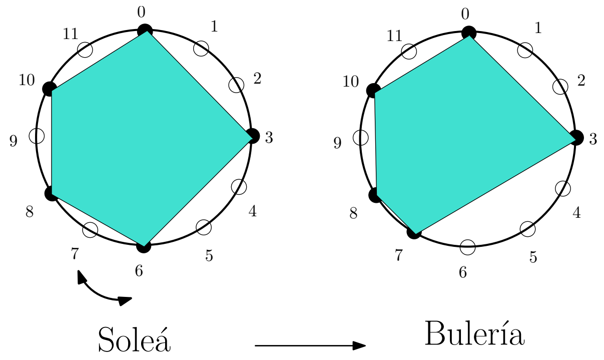

Figura 9: Un intercambio es suficiente para cambiar el compás.

de innovadores tales como Paco de Lucía (figura 11) y otros guitarristas del flamenco. En [7] se estudia la aportación de los guitarristas flamencos a la evolución de los cantes.

Lo anterior fundamenta la definición de distancia de permutación propuesta en [9, 10]. La distancia de permutación entre dos patrones rítmicos P_1 y P_2, $d_p(P_1, P_2)$, se define como el número mínimo de intercambios que permite transformar un compás en el otro. Este concepto, además, tiene el mismo espíritu que la *distancia de Hamming*, propuesta para resolver problemas con aplicaciones reales en *teoría de la información* [21]. R. W. Hamming (1915–1998) fue un matemático estadounidense cuyo trabajo tuvo muchas implicaciones en el avance de la informática y las telecomunicaciones[6] (figura 10).

La distancia de Hamming entre dos cadenas de códigos de igual longitud mide el número de sustituciones requeridas para transformar una cadena en la otra. Pongamos un ejemplo: si tenemos las cadenas binarias $C_1 = [10\mathbf{1}\mathbf{1}1\mathbf{0}\mathbf{1}]$ y $C_2 = [10\mathbf{0}\mathbf{1}\mathbf{0}01]$, la distancia de Hamming entre ellas es $d_h(C_1, C_2) = 2$. Aquí, la operación básica sobre la que se realiza el conteo es la *sustitución*. En el contexto de la música flamenca, en [9] se tomó como operación básica el *intercambio* o permutación entre pulsos consecutivos, y se llamó *distancia de permutación* entre dos compases al mínimo número de intercambios necesarios para transformar un compás en el otro. Si representamos los patrones soleá y bulería con «unos» y «ceros» (teoría de códigos), obtenemos $So = [001001010101]$ y $Bu = [001000110101]$. La distancia de Hamming entre ellos es igual a 2, y la distancia de permutación es igual a 1.

Una vez que tenemos dos representaciones binarias (ritmos), el cálculo eficiente de la distancia de permutación entre ellas requiere cierta habilidad. Aquí solo trataremos el caso en el que las cadenas binarias (compases) tienen el mismo número de «unos»

[6] Durante la Segunda Guerra Mundial, R. W. Hamming se integró en el proyecto Manhattan para determinar la solución de algunas ecuaciones proporcionadas por los físicos del proyecto. El objetivo del programa era descubrir si la detonación de una bomba atómica podría incendiar la atmósfera. El resultado del cálculo era que la ignición no ocurriría, así que los Estados Unidos utilizaron la bomba, primero como prueba en Nuevo México y poco más tarde en Hirosima contra Japón.

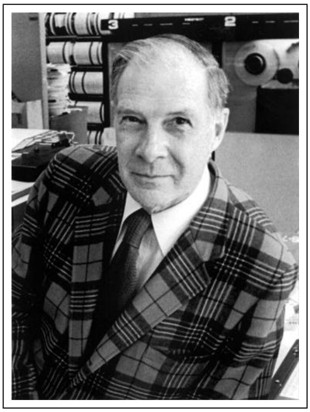

Figura 10: R. W. Hamming.

Figura 11: Camarón de la Isla y Paco de Lucía.

(acentos fuertes). En el caso del flamenco, soleá, bulería, seguiriya y guajira, tienen 5 acentos fuertes. El problema general que queremos resolver es el siguiente:

Problema 4: Cálculo de la distancia de permutación. *Considera dos cadenas binarias de n dígitos (n arbitrario) que tienen el mismo número de unos (y por tanto el mismo número de ceros). Diseñar un procedimiento que calcule eficientemente la distancia de permutación entre ellas.*

Nótese que cuando n es pequeño, como en el caso del flamenco ($n = 12$), este cálculo puede realizarse a ojo. En la figura 12 se representa el número mínimo de intercambios necesarios para transformar el compás de seguiriya en el compás de guajira. Pero si pensamos en el problema general, para cadenas de códigos con una gran cantidad de elementos, por ejemplo $n = 100$, no podremos hacerlo a ojo. Para ello, usamos la siguiente idea: representamos cada cadena como un vector que indica las posiciones donde se encuentran los «unos». Por ejemplo, seguiriya la representamos como $Se = (1, 3, 5, 8, 11)$ y guajira como $Gu = (1, 4, 7, 9, 11)$. Observamos ahora que el número mínimo de intercambios necesarios puede calcularse sumando las diferencias (en valor absoluto) entre las coordenadas de estos vectores auxiliares. ¿Por qué? Entonces, ¿cuál es el máximo número de operaciones que se requieren para calcular la distancia de permutación entre dos cadenas de n elementos?

En general, cuando queremos transformar una cadena en otra que no tiene la misma cantidad de unos, se aplican las siguientes restricciones (ponemos un ejemplo en la figura 13):

1. Se convierte el ritmo de más acentos fuertes (seguiriya en el ejemplo), al de menos acentos fuertes (fandango).
2. Cada acento (palmada fuerte) del mayor ha de moverse a un acento del menor.
3. Cada acento del menor (fandango en el ejemplo) ha de recibir al menos un acento del mayor (seguiriya).
4. Los acentos no pueden cruzar el final de la cadena y aparecer por el principio.

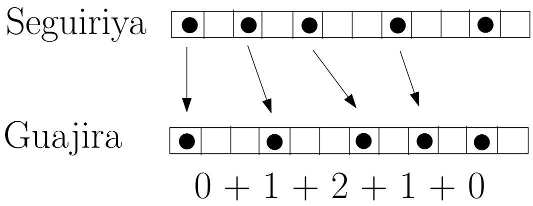

Figura 12: Los puntos negros se interpretan como «palma fuerte» y las cajas blancas como «palma débil». $d_p(Se, Gu) = |1-1| + |3-4| + |5-7| + |8-9| + |11-11| = 4$.

El problema general del cálculo de la distancia de permutación entre dos cadenas binarias cualesquiera de gran tamaño, requiere un estudio más elaborado que se escapa del objetivo de este trabajo. Notamos que la asignación de acentos para el caso de cadenas con el mismo número de «unos» es una biyección («de uno a uno»). Sin embargo, para el caso de cadenas con distinta cantidad de unos, la asignación ha de ser no inyectiva («de varios a uno») y sobreyectiva («aplicada a todos los unos de la menor»). El lector interesado en profundizar en este tema puede consultar el trabajo [2].

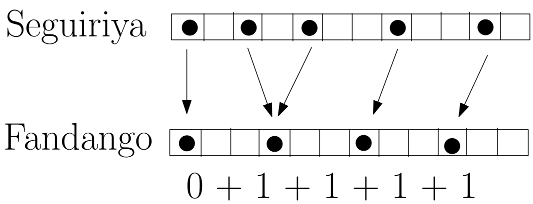

Figura 13: Se transforma el ritmo que tiene más acentos fuertes en el ritmo de menos acentos. $d_P(Se, Fa) = 4$.

Al igual que hicimos con la distancia cronotónica, ahora podemos obtener la distancia de permutación entre todos los ritmos ternarios flamencos tal como presentamos en el cuadro 2.

d_p	Soleá	Bulería	Seguiriya	Guajira	Fandango
Soleá	0	1	11	7	7
Bulería	1	0	12	8	8
Seguiriya	11	12	0	4	4
Guajira	7	8	4	0	2
Fandango	7	8	4	2	0
$\sum$	26	29	**34**	**21**	**21**
Máx	11	**12**	**12**	**8**	8

Cuadro 2: Tabla de distancias de permutación.

Observemos que para esta medida de similitud, y tomando la suma de distancias, $\sum$, como criterio de cercanía, es el compás de seguiriya el más alejado, y guajira y fandango empatan como los compases más parecidos a los demás compases. Por otro lado, si tomamos el criterio de la máxima distancia, *Máx*, el compás más alejado vuelve a ser bulería ($d_p(Bu, Se) = 12$) y también seguiriya[7].

Este estudio de similitud puede ser tenido en cuenta, a la hora de investigar el origen de los ritmos flamencos, interpretando estos como «seres vivos» que evolucionan en el tiempo en función de parámetros sociales (preferencias, modas, etc.). De esta forma, haciendo uso de este símil, podemos usar las técnicas propias de Bioinformática, que representan los datos de la matriz de similitud en un *árbol filogenético* que puede generarse con herramientas como SplitTree[8]. En las figuras 14 y 15 hemos representado los árboles filogenéticos (en general se requieren grafos) que se obtienen para los casos de distancia cronotónica y distancia de permutación, respectivamente. En los nodos se encuentran los seres vivos (los palos flamencos en nuestro caso), y la distancia entre dos nodos en dicho árbol coincide con la distancia dada en la matriz. Finalmente, indicamos aquí que esta metodología puede generalizarse a otros parámetros musicales y utilizarse para realizar un estudio científico sobre la evolución y/o clasificación de los estilos del flamenco[9] [4].

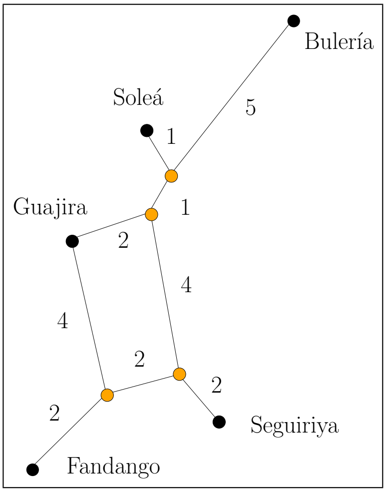

Figura 14: Árbol filogenético según la distancia cronotónica.

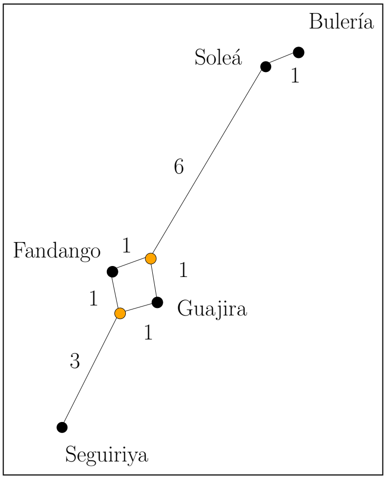

Figura 15: Árbol filogenético según la distancia de permutación.

[7]Este hecho pone en duda la teoría de que la seguiriya en un estilo primigenio del flamenco como se indicaba en [26].

[8]`http://www.splitstree.org/`

[9]Estas herramientas deberían utilizarse con cautela e interpretarse como complemento a otras que se desarrollen desde otras ópticas científicas como la historiográfica o antropológica.

5.2. Similitud melódica. La distancia de edición

Como vimos en la sección 3.2, una melodía puede codificarse como una sucesión de pares $M = \{(t_1, f_1), (t_2, f_2), \ldots, (t_n, f_n)\}$ que representan las notas o alturas f_i emitidas en cierto tiempo t_i. Si omitimos los tiempos, podemos representar una melodía como una cadena de símbolos o caracteres $M = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Problema 5: Distancia de similitud melódica entre cadenas. *Dadas dos cadenas de caracteres (simbólicos o numéricos) representando dos melodías, diseñar una medida o distancia entre ellas (que sea válida perceptualmente) para evaluar el «parecido» entre las dos. Dos melodías con poca distancia entre ellas deben corresponder a canciones similares.*

A continuación, se introduce una propuesta basada en la bien conocida *distancia de edición*. La distancia de edición entre dos cadenas, también llamada *distancia de Levenshtein*[10], se define como el número mínimo de caracteres que se tienen que *sustituir*, *insertar* o *borrar* para transformar una cadena en la otra. La distancia de edición se llama ponderada si considera pesos diferentes asociados a las operaciones sustituir, insertar o borrar, y la distancia será la suma de todos los pesos. Se puede considerar como una generalización de la distancia de Hamming. Veamos un ejemplo sencillo. Consideramos dos melodías representadas por las cadenas M_1 = LA-SOL-FA-MI y M_2 = DO-SOL-FA. M_1 corresponde a la sucesión de acordes de la *cadencia andaluza*, tan característica del flamenco. Estas dos secuencias armónicas se usan con frecuencia en el flamenco; por ejemplo, en el paseillo o introducción del fandango se usa M_1, y durante la ejecución de la letra propia del fandango se usa M_2. A simple vista podemos transformar M_1 en M_2 sin más que sustituir LA por DO y eliminar el MI del final. En este caso, la distancia de edición no ponderada es igual a 2.

En este punto nos preguntamos si 2 es, en efecto, el mínimo número de operaciones necesarias, y si podemos idear un método eficiente para calcular la distancia de edición entre dos cadenas de considerable longitud (nótese que una frase melódica puede contener muchas notas o alturas). Esto es, necesitaríamos un proceso que en un número finito de pasos (algoritmo) calcule la solución de forma correcta.

Problema 6: Cálculo de la distancia de edición. *Dadas dos cadenas de caracteres (no necesariamente de la misma longitud), calcular el número mínimo de operaciones requeridas para transformar una cadena en la otra utilizando las operaciones: inserción, eliminación o sustitución de un carácter.*

En 1965, el matemático ruso V. Levenshtein propuso un algoritmo sencillo para obtener la distancia de edición. En la misma idea se basan algoritmos que todos nosotros utilizamos a diario, como, por ejemplo, en los teclados predictivos en nuestros móviles, correctores ortográficos o el famoso «. . . Quizá quiso decir. . . » de los buscadores como Google.

El algoritmo se basa en la técnica *bottom-up*, común en *programación dinámica*[11], y lo explicamos con un ejemplo. Supongamos que la longitud de la cadena origen es

[10] `http://en.wikipedia.org/wiki/Levenshtein-distance`
[11] `http://es.wikipedia.org/wiki/Programación-dinámica`

n y la longitud de la cadena destino es m. El algoritmo usa una matriz de $n+1$ filas y $m+1$ columnas. Esta matriz la vamos a representar de modo que su origen $(0,0)$ se encuentra en la esquina superior izquierda, tal como se ilustra en la figura 16.

Algoritmo de Levenshtein

Entrada: Cadena origen y Cadena destino.

Salida: Valor de la distancia de edición.

Paso 1 (inicialización): Crear una matriz de $n+1$ filas y $m+1$ columnas. Inicializamos la primera fila de 0 a m y la primera columna de 0 a n. Pondremos en vertical nuestra palabra de partida, y en horizontal nuestra palabra objetivo (en la figura 16 se ilustra el algoritmo con un ejemplo).

Paso 2 (bucle): se rellenan las casillas de la matriz por filas de izquierda a derecha siguiendo la fórmula siguiente: el elemento (i,j) de la matriz será el mínimo entre:

(a) La celda inmediatamente superior más 1.

(b) La celda inmediatamente a la izquierda más 1.

(c) La celda diagonal superior izquierda (más 1 si los caracteres no son iguales).

Paso 3 (salida): El valor de la distancia aparece en la celda $(n+1, m+1)$.

		M	E	I	L	E	N	S	T	E	I	N
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
L	1	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10
E	2	2	1	2	3	3	4	5	6	7	8	9
V	3	3	2	2	3	4	4	5	6	7	8	9
E	4	4	3	3	3	3	4	5	6	6	7	8
N	5	5	4	4	4	4	3	4	5	6	7	7
S	6	6	5	5	5	5	4	3	4	5	6	7
H	7	7	6	6	6	6	5	4	4	5	6	7
T	8	8	7	7	7	7	6	5	4	5	6	7
E	9	9	8	8	8	7	7	6	5	4	5	6
I	10	10	9	8	8	8	8	7	6	5	4	5
N	11	11	10	9	9	9	8	8	7	6	5	4

Figura 16: Ejemplo del algoritmo de Levenshtein.

Hemos visto el caso de distancia no ponderada, esto es, todos los pesos valen 1. No es difícil adaptar el algoritmo anterior para el caso ponderado. En música, por ejemplo, cuando queremos estudiar la similitud de dos melodías tiene sentido dar más peso a la sustitución que a la eliminación o inserción de notas. En el cante flamenco sabemos que la diferencia entre una interpretación y otra radica en la adición o no de notas adornos, de forma que, la transformación de una frase de soleá a otra muy similar debe poder hacerse básicamente con inserciones o borrados de notas de adorno. Los cambios en el algoritmo radican en multiplicar la primera columna por el coste de eliminación, toda la primera fila por el de inserción, y sustituir el valor uno que sumamos en la fórmula por el peso correspondiente. La corrección de este algoritmo se propone como un ejercicio sencillo al lector.

Como aplicación al estudio de los cantes flamencos de esta distancia, veamos cómo se pueden generar grupos de cantes en base a la similitud de sus melodías. Tomamos un conjunto de audios (corpus musical) que queremos estudiar y obtenemos la matriz de similitud calculando las distancias entre cada dos cantes. Puesto que las cadenas que representan una frase melódica contienen una gran cantidad de notas, necesitamos implementar el algoritmo de Levenshtein. Una vez calculada la matriz de similitud, al igual que hicimos en el caso de la similitud rítmica, construimos el grafo de similitud o árbol filogenético que ilustramos en la figura 17. Observamos que los tres cantes elegidos para el experimento, debla, martinete 1 y martinete 2, aparecen bien separados en el grafo. Observamos también que hay dos deblas, las de los cantaores Chocolate y Manuel Simón, que aparecen desmembradas del grupo de deblas. Resulta ahora de interés investigar sobre este hecho: indagar si es debido a que la interpretación que hacen de la debla se aleja realmente de las demás, o bien si la distancia de edición no da buenos resultados para estos casos (llamados *outsiders*). De cualquier modo, este problema requiere un estudio más profundo que se escapa al objetivo de este artículo. El lector interesado puede consultar los trabajos [27, 29].

6. Aproximación de funciones. Simplificación melódica

Como hemos dicho anteriormente, una frase melódica extraída de un audio puede ser una cadena compuesta por una gran cantidad de caracteres (alturas o notas). Muchos de estos datos provienen de adornos o melismas, y solo unos pocos corresponden al esqueleto melódico del cante, esto es, a la sucesión de notas principales que determinan la melodía. De hecho, una transcripción manual en una partitura no es más que una aproximación a la melodía que contiene unas cuantas notas elegidas por el transcriptor como las representativas que definen, para él, la melodía.

Si quisiéramos utilizar la señal de audio sin hacer transcripción manual (que es, por cierto, subjetiva y costosa), tendríamos que extraer una aproximación discreta de la señal continua que tenemos representada por una sucesión discreta de notas o alturas. En la figura 5 se representaba una señal de un cante por debla y su aproximación por una sucesión de alturas. En este punto nos topamos con un concepto fundamental en matemáticas que ha sido estudiado profundamente debido a la gran cantidad de aplicaciones reales que la han demandado: la *teoría de la aproximación*.

Aproximar, según la Real Academia Española en su *Diccionario de la Lengua*, significa «. . . obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado. . . ». Nuestro objetivo reside entonces en la obtención de resultados tan cercanos al exacto como sea necesario con el propósito de trabajar con funciones sencillas en lugar de hacerlo con funciones complicadas. Una buena aproximación es una representación inexacta que, sin embargo, es suficientemente fiel como para ser útil para el problema en cuestión (por ejemplo, similitud melódica en cantes flamencos).

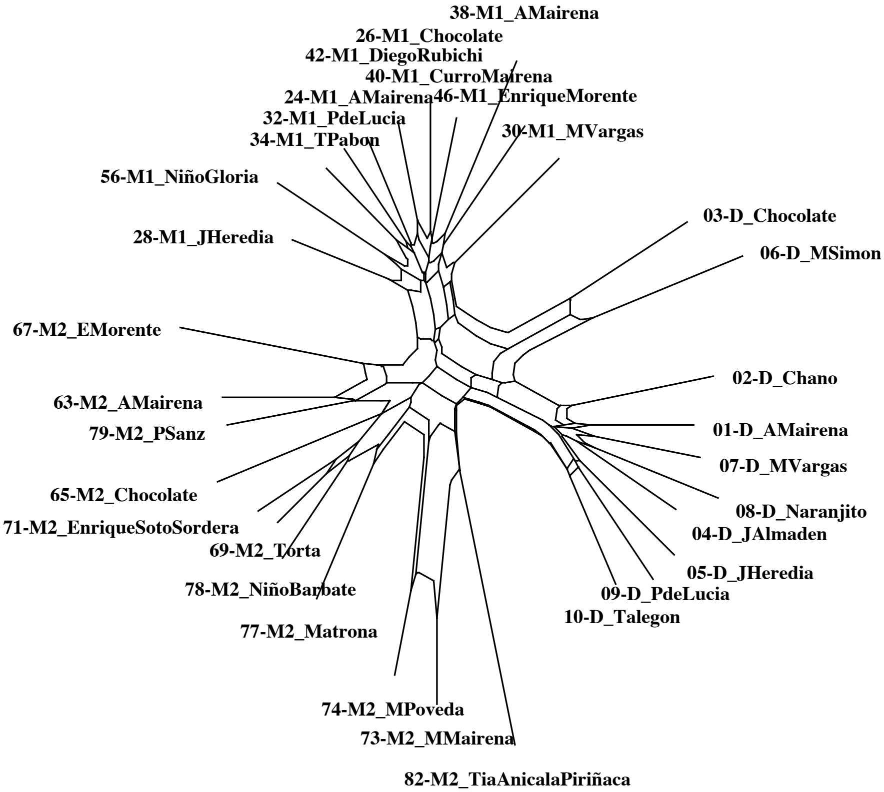

Figura 17: Grafo de similitud para cantes «a capela» generado por SplitTree.

6.1. La función escalonada. Aproximando una función continua por otra escalonada

Una función escalonada es una función definida a trozos donde la imagen de cada trozo es una constante. A cada constante se le llama salto o *escalón* de la función. Por ejemplo, la función $f(x) = k$ en cada intervalo $[k-1, k)$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$ es una función escalonada definida en toda la recta real positiva.

Problema 7: Distancia de similitud entre funciones escalonadas. *Dadas dos funciones escalonadas, f y g, representando dos melodías definidas en el mismo intervalo de tiempo, diseñar una medida o distancia,* $\mathrm{Dist}(f, g)$, *que represente de alguna manera el «parecido» entre las dos. Dos melodías con poca distancia entre ellas deben corresponder a canciones similares.*

Problema 8: Aproximación por una función escalonada. *Dado un conjunto de puntos $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ en el plano, y un valor de error $\alpha \geq 0$, construir una función escalonada E que aproxime el conjunto de puntos P de tal* *forma que el error cometido (definido como* $\max d_v(p_i, E)$*) no supere* α *y esté compuesta por el mínimo número de escalones.*

La distancia vertical de un punto $p_i = (x_i, y_i)$ (x_i en el dominio de f) a una función f se define como $d_v(p_i, f) = |f(x_i) - y_i|$. Se trata entonces de diseñar un procedimiento eficiente que resuelva este problema de aproximación. La interpretación en el campo musical es la siguiente. Una curva melódica puede aproximarse por una función escalonada, proceso que se denomina *segmentación* en Tecnología Musical. Puesto que el rango de la voz flamenca está normalmente limitado a una octava, valores de error α de uno o medio tono deberían de ser adecuados para extraer el esqueleto melódico de un determinado cante. Estos problemas están relacionados con la clasificación de los cantes flamencos según proximidad en la interpretación. A continuación describimos un método eficiente propuesto en [11] que podemos usar para resolver el problema anterior.

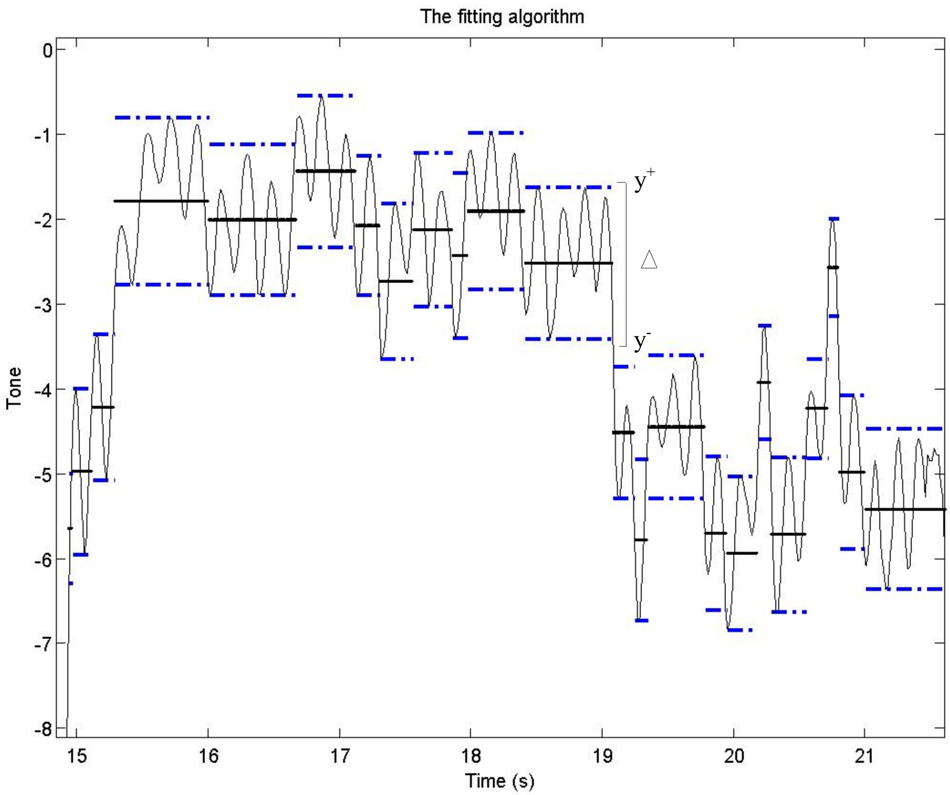

Figura 18: Construcción de una función escalonada que ajusta una curva melódica flamenca.

Dado el conjunto de los n puntos $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y el error de tolerancia α, consideramos segmentos verticales V_i centrados en cada punto p_i de longitud 2α, véase la figura 18. La restricción de que cada punto p_i ha de estar alejado verticalmente a lo más α de la función escalonada E es equivalente a decir que la función E interseca a todos los segmentos V_i de longitud 2α. De esta forma, procedemos de izquierda a derecha generando un escalón que interseque la mayor cantidad de segmentos verticales consecutivos posibles, después comenzamos con un segundo escalón, y así sucesivamente. Un segmento vertical viene definido por un intervalo en la variable y, digamos, $[y_i^-, y_i^+]$, donde y_i^- y y_i^+ denotan las ordenadas del menor y mayor punto extremo, respectivamente. Procediendo de izquierda a derecha, basta con mantener la intersección Δ de los segmentos verticales hasta llegar a un segmento V_j que no interseca con Δ, en cuyo caso se acaba el escalón en construcción y comienza uno nuevo en V_j, actualizándose Δ como $[y_j^-, y_j^+]$ (figura 18). No resulta difícil probar que este proceso conlleva un número de operaciones que es una función lineal en la cantidad de puntos de P y construye una función escalonada con las especificaciones pedidas: con número mínimo de escalones y cuyo error no supera la tolerancia α.

Para ver si realmente la aproximación por funciones escalonadas da buenos resultados en el caso que nos ocupa, hemos realizado un experimento con un corpus de cantes flamencos que contiene dos estilos, deblas y martinetes[12], y obtenido el árbol filogenético a partir de la matriz de similitud creada con una distancia de similitud. En las figuras 19 y 20 apreciamos que los resultados de *clustering* obtenidos antes y después de la simplificación son similares, lo que valida el método de aproximación utilizado.

7. Algunas reflexiones

En este trabajo se ha presentado una pequeña colección de problemas para su posible utilización en la docencia e investigación de las matemáticas. El aspecto diferencial de este *corpus de problemas* no es otro que su procedencia. El hecho de que hayan aparecido de manera natural en el estudio de un fenómeno tan popular como el flamenco, supuestamente tan alejado de las matemáticas, lo hace un buen candidato para introducir en la clase conceptos formales con ejemplos atractivos. Tal es el caso del concepto de la permutación o intercambio de caracteres en una cadena y la definición formal de distancia en niveles preuniversitarios de la enseñanza, o el de la programación dinámica y otros paradigmas algorítmicos en cursos universitarios.

Estos problemas pueden extenderse con otros de relevancia como el diseño de algoritmos de búsqueda de patrones musicales, útiles para clasificar estilos o variantes. Pongamos un ejemplo que ilustre el problema: si detectamos que un patrón distintivo del fandango de Valverde está incluido en un audio, con alta probabilidad será un cante de ese estilo de Huelva [29]. Otras cuestiones de tecnología musical que demandan progreso científico son:

- Diseño de un algoritmo robusto de separación de la voz flamenca (la mayoría de las grabaciones existentes no separan guitarra, percusión y voz) [15].

[12] El corpus ha sido extraído de la colección TONAS `http://mtg.upf.edu/download/datasets/tonas`

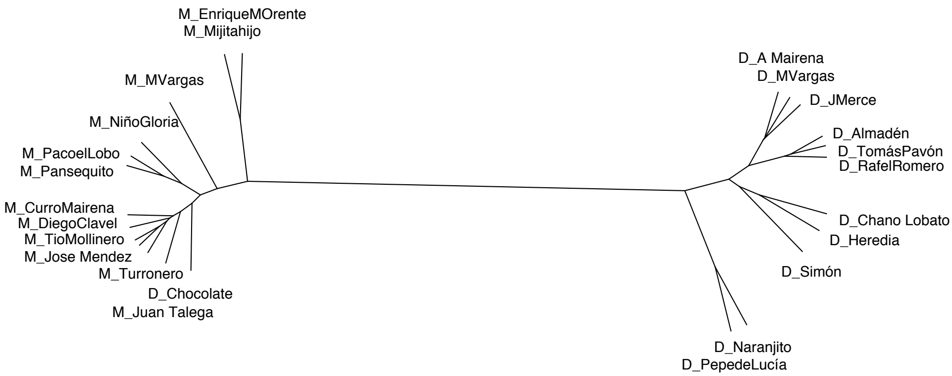

Figura 19: Grupos bien definidos antes de la segmentación. Aparece un *outsider*: Debla de Chocolate.

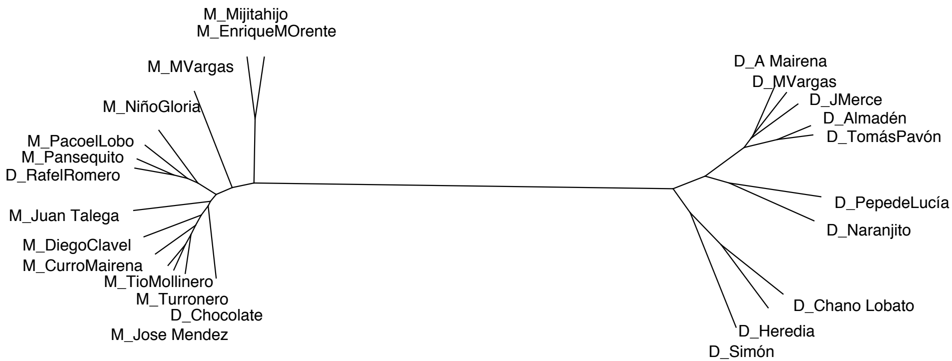

Figura 20: Grupos bien definidos después de la segmentación. Aparecen dos *outsiders*: Deblas de Chocolate y de Rafael Romero.

- Diseño de un método de estimación de altura y segmentación en notas [14].
- Definición de una distancia de similitud melódica combinada con aspectos musicales [27].
- Diseño de algoritmos para la detección automática de ornamentos o motivos melódicos [16].
- Estudio de propiedades matemáticas de preferencia y su contraste en el mundo del flamenco [8].

El objetivo principal que nos lleva al desarrollo de técnicas matemáticas y computacionales como las mencionadas en este artículo no es otro que ofrecer una herramienta objetiva para complementar y contrastar resultados que se puedan obtener desde otros campos científicos. Además, debido a la propia naturaleza multidisciplinar de la investigación en la música flamenca, se desprenden temas de estudio que suponen avance en el conocimiento y potencia investigación no solo en Matemáticas, sino en otras áreas como Antropología, Ingeniería, Pedagogía o Musicología, véase [5, 6].

Finalmente, haremos notar que, además del avance académico y científico que supone, no resulta difícil mencionar posibles aplicaciones comerciales que pueden implantarse a partir del software que se desarrolle en cada proyecto de investigación de tecnología musical (sistemas de recomendación musical, de reconocimiento on-line de estilos, de clasificación automática de estilos, etc.)

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en al marco del proyecto de excelencia COFLA: análisis COmputacional de la música FLAmenca (P09-TIC-4840) de la Junta de Andalucía (Consejería de Innovación, Ciencia y Empresas).

Referencias

[1] D. J. Benson, Music: a mathematical offering, *Math. Intelligencer* **30** (1) (2008), 76–77.

[2] J. Colannino, M. Damian, F. Hurtado, J. Iacono, H. Meijer, S. Ramaswami y G.T. Toussaint, An $O(n \log n)$-time algorithm for the restriction scaffold assignment problem, *J. Comput. Biol.* **13** (4) (2006), 979–989.

[3] C. Cronin, *Concepts of Melodic Similarity in Music-Copyright Infringement Suits. Computing in Musicology* (Walter B. Hewlett y Eleanor Selfridge-Field, eds.), MIT Press, Cambridge, 1998.

[4] J.M. Díaz-Báñez, Génesis y compás en el flamenco: una aproximación desde la ciencia, *El olivo*, enero 2005.

[5] J.M. Díaz-Báñez et al., Análisis Computacional de la Música Flamenca, *Libro Blanco del Flamenco*, Consejería de Cultura y Deporte, Junta de Andalucía, 2012.

[6] J.M. Díaz-Báñez y R. Gutiérrez-Cordero, COFLA: Un ejemplo de investigación interdisciplinar, *Actas del VIII Congreso de la Sociedad Española de Musicología*, Logroño, septiembre 2012.

[7] J.M. Díaz-Báñez y F.J. Escobar-Borrego, La guitarra flamenca en la evolución del cante: ¿acompañante o creadora?, *Candil* **150** (2004).

[8] J.M. Díaz-Báñez y F.J. Escobar-Borrego, La modulación tonal en las formas musicales del Flamenco: propiedades de preferencia e hibridación armónica, *Itamar. Revista de Investigación Musical: Territorios para el Arte* **3** (2010), 261–266.

[9] J.M. Díaz-Báñez, G. Farigu, F. Gómez, D. Rappaport y G.T. Toussaint, El Compás Flamenco: A Phylogenetic Analysis, *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, 61–70, Winfield, Kansas, 2004.

[10] J.M. Díaz-Báñez, G. Farigu, F. Gómez, D. Rappaport y G.T. Toussaint, Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión de la matemática computacional, *La Gaceta de la RSME* **8** (2) (2005), 489–509.

[11] J.M. Díaz-Báñez y J.A. Mesa, Fitting rectilinear polygonal curves to a set of points in the plane, *European J. Oper. Res.* **130** (1) (2001), 214–222.

[12] L. Fernández, *Teoría musical del flamenco*, Acordes Concert, 2004.

[13] J.M. Gamboa, *Cante por cante: discolibro didáctico de flamenco*, New Atlantis Music, Alia Discos, Madrid, 2002.

[14] E. Gómez y J. Bonada, Towards Computer-Assisted Flamenco Transcription: An Experimental Comparison of Automatic Transcription Algorithms As Applied to A Cappella Singing, *Computer Music Journal* **35** (1) (2013), 7–90.

[15] E. Gómez, F. Cañadas, J. Salamon, J. Bonada, P. Vera y P. Cabañas, Predominant Fundamental Frequency Estimation vs Singing Voice Separation for the Automatic Transcription of Accompanied Flamenco Singing, *Proc. 13th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2012).*

[16] F. Gómez, A. Pikrakis, J. Mora, J.M. Díaz-Báñez y E. Gómez, Automatic Detection of Ornamentation in Flamenco Music, *Proc. 4th International Workshop on Machine Learning and Music: Learning from Musical Structure*, Granada, 2011.

[17] C. Guastavino, F. Gómez, G.T. Toussaint, F. Marandola y E. Gómez, Measuring similarity between flamenco rhythmic patterns, *Journal of New Music Research* **38** (2) (2009), 174–176.

[18] K. Gustafson, A new method for displaying speech rhythm, with illustrations from some Nordic languages, *Nordic Prosody IV* (K. Gregersen y H. Basboll, eds.), 105–114, Odense University Press, 1987.

[19] K. Gustafson, The graphical representation of rhythm, *Progress Report from Oxford Phonetics (PROPH)* **3** (1988), 6–26.

[20] L. Harkleroad, *The math behind the music*, vol. 2, Cambridge Univ. Press, 2006.

[21] R.W. Hamming, *Coding and Information Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986.

[22] W.B. Hewlett y E. Selfridge-Field eds., *Melodic Similarity: Concepts, Procedures, and Applications*, MIT Press, 1998.

[23] L. Hofmann-Engl, Rhythmic similarity: A theoretical and empirical approach, *Proc. of the Seventh International Conference on Music Perception and Cognition* (C. Stevens, D. Burnham, G. McPherson, E. Schubert y J. Renwick eds.), 564–567, Sidney, 2002.

[24] A. Holzapfel, *Similarity methods for computational ethnomusicology*, PhD thesis, Computer Science Department, University of Crete, 2010.

[25] E. Krenek, *Über Neue Musik* (capítulo *Musik und mathematik*), Verlag der Ringbuchhandlung, Vienna, 1937.

[26] R. Molina y A. Mairena, *Mundo y formas del cante flamenco*, Ed. Revista de Occidente, Madrid, 1963.

[27] J. Mora, F. Gómez, E. Gómez, F.J. Escobar-Borrego y J.M. Díaz-Báñez, Melodic Characterization and Similarity in A Cappella Flamenco Cantes, *Proc. of the 11th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2010)*, Amsterdam.

[28] R. Pelinski, *Invitación a la etnomusicología*, vol. 1, Akal, 2000.

[29] A. Pikrakis, F. Gómez, S. Oramas, J.M. Díaz-Báñez, J. Mora y F.J. Escobar-Borrego, Tracking Melodic Patterns in Flamenco Singing by Analyzing Polyphonic Music Recordings, *Proc. of the 13th International Society for Music Information Retrieval Conference (ISMIR 2012)*, Porto.

[30] M. Schmuckler, Testing models of melodic contour similarity, *Music Perception* **16** (1999), 109–150.

[31] E. Thul y G.T. Toussaint, Analysis of musical rhythm complexity measures in a cultural context, *Proc. of the 2008 C 3 S 2 E conference*, ACM, 2008.

[32] L.F. Tóth, On the sum of distances determined by a pointset, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* **7** (1956), 397–401.

[33] D. Wright, *Mathematics and music*, Mathematical World, vol. 28, American Mathematical Society, 2009.

José-Miguel Díaz-Báñez, Dpto. de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla
Correo electrónico: dbanez@us.es
Página web: http://personal.us.es/dbanez/